И.А. Панин

$\boxed{\text{Лемма}}\ \boxed{1.6}$

Пусть $f: \underset{\substack{\cap \\ Sm}}{Y} \longrightarrow \underset{\substack{\cap \\ Sm}}{X}$ — покрытие по Нисневичу многообразия X.

Тогда следующая последовательность пучков Нисневича точна:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}(X) \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}(Y) \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}(Y \times_X Y) \leftarrow \dots$$

<u>Д-во</u>: достаточно доказать, что для любой гладкой гензелевой схемы S последовательность абелевых групп

$$A_\bullet(S) = (0 \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}(X)(S) \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}(Y)(S) \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}(Y \times_X Y)(S) \leftarrow \dots)$$

точна.

Фиксируем замкнутую подсхему Z в $X \times S$:

$$\begin{tikzcd} X \times S \arrow[d] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\text{конечный сюръективный}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

неприводимая редуцированная

Обозначим через $A_n^Z(S) \leqslant A_n(S)$ подгруппу, порожденную замкнутыми неприводимыми $T \subset (\underbrace{Y \times_X Y \times_X \dots \times_X Y}_{n \text{ раз}}) \times S$ такими, что образ T в $X \times S$ равен Z и $T \downarrow S$ — конечный сюръективный.

Наблюдение: $A_n(S) = \bigoplus A_n^Z(S)$ и, более того,

$$A_\bullet(S) = \bigoplus A_\bullet^Z(S)$$

Поэтому достаточно доказать, что $\forall\, Z \hookrightarrow X \times S$ как выше $A_\bullet^Z(S)$ точен. Явно выпишем гомотопию

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\text{кон.}"'] & X \times S \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

S — лок. гензелева $\rightsquigarrow$ Z — локально гензелева

(аналогично: A — локальное полное нетерово, $A \longrightarrow A'$ — область, конечно порожденная как A-модуль $\Rightarrow A'$ — локальное полное)

$$\begin{tikzcd} & X & Y \arrow[l] \\ Z \arrow[ur] \arrow[r, hook] \arrow[urr, dashed] & X \times S \arrow[u] & Y \times S \arrow[l] \\ & z \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "\text{Нисн.}"'] \\ Z \arrow[u] \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, dashed, bend right, "s"'] & Z \underset{X}{\times} Y \arrow[l, "\text{Нисн.}"'] \arrow[u] \\ z \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, equal] & z \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

Точка z поднимается, т.к. это покрытие Нисневича

Z - лок. гензелева $\Rightarrow \exists$ сечение $s \Rightarrow \exists f$

T — образующая $A_n^Z(X)$: $T \subset (\underbrace{Y \underset{X}{\times} Y \underset{X}{\times} \dots \underset{X}{\times} Y}_{n}) \times S$

Хотим построить $T' \subset (\underbrace{Y \times Y \times \dots \times Y}_{n}) \underset{X}{\times} Y \times S$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "(pr_1, f\circ g, pr_2)"] \arrow[d, "g"] & (\underbrace{Y \times Y \times \dots \times Y}_{n}) \times Y \times S \\ Z \arrow[r, hook] \arrow[ur, bend left, "f"] & X \times S \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Утверждение}}$ $(pr_1, f\circ g, pr_2) \overset{u_n}{=}$ замкнутое вложение — несложно!

Тогда $u_n(T)$ — замкнутое неприводимое, $u_n(T) \in A_{n+1}^Z(S)$

$\rightarrow$ получили $u_n : A_n^Z(S) \longrightarrow A_{n+1}^Z(S)$

$$T \longmapsto u_n(T)$$

$\boxed{\text{Утверждение}}$ $\{u_n\}$ — стягивающая гомотопия комплекса $A_\bullet^Z(S)$:

$$d_{n+1} \circ u_n \pm u_{n-1} \circ d_n = id$$

<u>Д-во</u>: $d_n = \sum (-1)^i (p_i)_*$, где $\underbrace{Y \underset{X}{\times} \dots \underset{X}{\times} Y}_{n+1} \xleftarrow{p_i} \underbrace{Y \underset{X}{\times} \dots \underset{X}{\times} Y}_{n}$ — вычеркивание i-го сомножителя.

$$\begin{tikzcd} A_0^Z(S) \arrow[r, bend left, "u_0"] & A_1^Z(S) \arrow[l, "d_1"] \\ \mathbb{Z}_{tr}(X)(S) \arrow[u, phantom, "\cap"] & \mathbb{Z}_{tr}(Y)(S) \arrow[u, phantom, "\cap"] \\ z \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & u_0(z) \arrow[d, hook] \\ X \times S & Y \times S \end{tikzcd}$$

Проверим: $d_1 \circ u_0 = id$

$$\begin{tikzcd} A_1^{\mathbb{Z}}(S) \arrow[d, hook] & A_2^{\mathbb{Z}}(S) \arrow[l, "(p_1)_* - (p_2)_*"'] \arrow[d, hook] \\ \mathbb{Z}_{tr}(Y)(S) & \mathbb{Z}_{tr}(Y \times_X Y)(S) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Z & T \arrow[l] \arrow[rr, "(pr_1, f\circ g, pr_2)"] & & {} \\ X\times S \arrow[u, phantom, "\bigcap"] & Y\times S \arrow[l] \arrow[u, phantom, "\bigcap"] \arrow[rr] & & Y\times_X Y\times S \end{tikzcd}$$

$u_0 = f\circ g$

$T \hookrightarrow f(Z) \subset Y\times S$

$(p_2)_*(T) = (pr_1, pr_2)(T) = T$ — 1-ую, и дальше аналогично

$(p_1)_*(T) = f(Z)$

$\square$

<u>Первое применение</u>

$\mathcal{F}: Cor \longrightarrow Ab$ — предпучок с трансферами.

Тогда на $a_{Nis}(\mathcal{F})$ существует единственная структура пучка с трансферами такая, что $\mathcal{F} \longrightarrow a_{Nis}(\mathcal{F})$ — гомоморфизм предпучков с трансферами.

<u>Д-во</u> (1) Нужно доказать, что $\mathcal{F}^{loc} \subset \mathcal{F}$ выдерживает трансферы, имеющиеся на $\mathcal{F}$. // $\mathcal{F}^{loc}(X) = \{s\in\mathcal{F}(X) \mid s$ локально $=0$ в топ. Нисневича$\}$

Возьмем $X \in Sm$, $s \in \mathcal{F}^{loc}(X) \rightsquigarrow \exists$ покрытие по Нисневичу $V \xrightarrow{\pi} X$ такое, что $\pi^*(s) = 0$ в $\mathcal{F}(V)$. Пусть $Y \in Sm$, $\alpha: Y \longrightarrow X$:

$\alpha \in Cor(Y, X) = \mathbb{Z}_{tr}(X)(Y)$. Докажем, что $\alpha^*(s) \in \mathcal{F}^{loc}(Y)$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, dashed, "\rho"'] \arrow[dr, dashed] & V \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{tr}(V) \arrow[d, "\pi_*"'] \\ \mathbb{Z}_{tr}(X) \end{tikzcd}$$

— локально сюрьективно в топологии Нисневича. После измельчения Y в топологии Нисневича: α приходит с сечения $\mathbb{Z}_{tr}(V)$

т.е. $\alpha \in \mathbb{Z}_{tr}(X)(Y) \rightsquigarrow$ найдется покрытие по Нисневичу $U \xrightarrow{\rho} Y$ такое, что $\alpha\circ\rho = \rho^*(\alpha) = \pi\circ\tilde{\alpha}$ для некоторого $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}_{tr}(V)(U)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{tr}(V)(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\pi(Y)"] & \mathbb{Z}_{tr}(V)(U) \arrow[d, "\pi(U)"] & \ni \tilde{\alpha} - \exists \in Cor(U,V) \arrow[d, mapsto] \\
\mathbb{Z}_{tr}(X)(Y) \arrow[r] & \mathbb{Z}_{tr}(X)(U) & \\
\alpha \arrow[rr, mapsto] & & \rho^*(\alpha) = \alpha|_U = \pi \circ \tilde{\alpha}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & Cor(U,V) \ni \tilde{\alpha} & & \\
0 & U \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\text{Нисн.} - \rho"'] & V \arrow[d, "\pi - \text{Нисн.}"] & 0 \arrow[lll, bend right] \\
\alpha^*(s) \arrow[u, leftrightarrow] & Y \arrow[r, "\alpha"'] & X & s \arrow[u, mapsto] \arrow[lll, bend left] \\
 & \alpha \in Cor(Y,X) & &
\end{tikzcd}
\qquad (**)
$$

$\Rightarrow \alpha^*(s)|_U = 0$

$\Rightarrow \alpha^*(s)$ локально тривиально:
$\alpha^*(s) \in \mathcal{F}^{loc}(Y)$

Отсюда следует, что на $\mathcal{F}/\mathcal{F}^{loc}$ есть трансферы.

$\mathcal{F}/\mathcal{F}^{loc}$ — отделим.

Поэтому можно считать, что с самого начала $\mathcal{F}$ — отделим.

Построим трансферы на $a_{Nis}(\mathcal{F})$. Пусть $s \in \mathcal{F}(V)$:

$$
\begin{tikzcd}
V \times_X V \arrow[d, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift left, "p_2"] \\
V \arrow[d] \\
X
\end{tikzcd}
\qquad p_1^*(s) - p_2^*(s) = 0
$$

$\mathcal{F}(V) = \mathrm{Hom}_{Pre}(\mathbb{Z}_{tr}(V), \mathcal{F})$ — Yoneda

$$
\begin{tikzcd}
s \in \mathrm{Hom}_{Pre}(\mathbb{Z}_{tr}(V), \mathcal{F}) \arrow[d, "p_1^* - p_2^*"] \\
0 \in \mathrm{Hom}_{Pre}(\mathbb{Z}_{tr}(V \times_X V), \mathcal{F})
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{tr}(V \times_X V) \arrow[dr, "p_1^* - p_2^*"'] \arrow[drr, "0"] & & \\
 & \mathbb{Z}_{tr}(V) \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathcal{F} \\
 & \mathrm{Coker}(p_1^* - p_2^*) \arrow[ur, dashed] \arrow[d] & \\
 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

— в категории предпучков.

$$
\begin{tikzcd}
a_{Nis}(s) : & a_{Nis}(\mathrm{Coker}(p_1^* - p_2^*)) \arrow[r] & a_{Nis}(\mathcal{F}) \\
 & \mathbb{Z}_{tr}(X) \arrow[u, equal, "\text{по Лемме}"'] \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

$a_{Nis}(s) = s_{Nis}$

— в Sh_{Nis} на Sm

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[rr, mapsto] & & (\overline{s}_{Nis})(\alpha) \\
Cor(Y,X) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & & \\
\mathbb{Z}_{tr}(X)(Y) \arrow[u, phantom, sloped, "="] \arrow[rr] & & a_{Nis}(\mathcal{F})(Y) \arrow[uu, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}$$

$\leadsto$ для любого соответствия $\alpha : Y \longrightarrow X$ мы получили некоторый $(\overline{s}_{Nis})(\alpha) \in \widetilde{\mathcal{F}_{Nis}}(Y)$

Определим $\alpha^*(s) = (\overline{s}_{Nis})(\alpha)$; осталось проверить, что $\forall\ Z \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\alpha} X$. $\forall s \in \widetilde{\mathcal{F}_{Nis}}(X)$ выполнено.

$$\beta^*(\alpha^*(s)) = (\alpha \circ \beta)^*(s)$$

— используя пару раз диаграмму типа $(**)$, это доказывается.