11.04.2013

Ч.А. Панин

Теорема k — совершенное поле, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок с трансферами. Тогда $\forall i \geq 0$ $U \longmapsto H^i_{Nis}(U, \mathcal{F})$ — гомотопически инвариантный предпучок с трансферами.

Предложение $H^i_{Nis}(U, \mathcal{F})$ — предпучок с трансферами

~~Док-во~~ Д-во $H^i_{Nis}(U, \mathcal{F}) = Ext^i_{SNwT}(\mathbb{Z}_{tr}(U), \mathcal{F})$

Мы знаем, что $H^i_{Nis}(U, \mathcal{F}) = \check{H}^i_{Nis}(U, \mathcal{F})$ — когомологии Чеха

$$\begin{aligned} H^i_{Nis}(U, \mathcal{F}) &= \check{H}^i_{Nis}(U, \mathcal{F}) \\ &= H^i(\Gamma(U, I^\bullet)) \\ &= H^i(Hom_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}(U), I^\bullet)) \\ &= Ext^i_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}(U), \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Лемма 1 $I \in NSwT$ — инъективный; тогда $H^p_{Nis}(U, I) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ I(U), & p = 0. \end{cases}$

Док-во Уже знаем, что $\check{H}^p_{Nis}(U, I) = H^p_{Nis}(U, I)$

$\tilde{U} \longrightarrow U$ — покрытие по Нисневичу

$0 \longleftarrow \mathbb{Z}_{tr}(U) \longleftarrow \mathbb{Z}_{tr}(\tilde{U}) \longleftarrow \mathbb{Z}_{tr}(\tilde{U} \times_U \tilde{U}) \longleftarrow \ldots$

— точен как комплекс пучков Нисневича

I — инъективен в $NSwT \Rightarrow Hom_{NSwT}(-, I)$ точен

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}(U), I) & \longrightarrow & Hom_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}(\tilde{U}), I) & \longrightarrow & \ldots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & I(U) & \longrightarrow & I(\tilde{U}) & \longrightarrow & I(\tilde{U} \times_U \tilde{U}) \end{array}$$

— точные комплексы

$\Rightarrow \check{H}^0(U, I) = I(U)$, $\check{H}^p(U, I) = 0$ при $p > 0$ $\square$

— продолжение док-ва предложения

$\Rightarrow H^i_{Nis}(U, \mathcal{F}) = Ext^i_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}(U), \mathcal{F})$

$\Rightarrow (U \longmapsto H^i_{Nis}(U, \mathcal{F}))$ — предпучок с трансферами. $\square$

Схема доказательства теоремы

Индукция по i

$i=0$, $i=1$ — уже доказали

| k — совершенно $\Rightarrow$ $\forall$ многообразие Z/k содержит открытый кусок Z_0 такой, что Z_0/k — k-гладкое.

Пусть $X/_k$ — гладкое многообразие

$$\begin{array}{c} X\times\mathbb{A}^1 \\ \downarrow{\scriptstyle p} \\ X \end{array}$$

Пусть для всех $j<i$ уже доказано и $i\geq 2$

$* \quad R^j_{p_*}(\mathcal{F})=0 \qquad \boxed{\text{Лемма } \boxed{2}}\ 0<j<i$

$R^j{p_*}(\mathcal{F})$ — пучок, ассоциированный с предпучком

предп. индукции

$$U \longmapsto H^j_{Nis}(U\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F}) = H^j_{Nis}(U,\mathcal{F})$$

Если U локальное

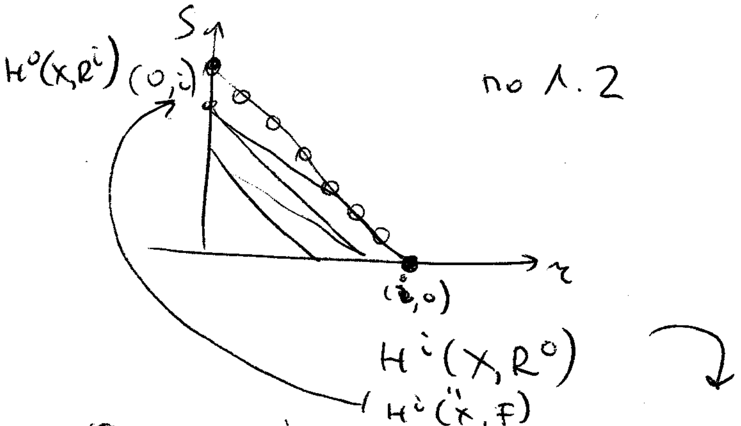
предпучок с трансферами

U гомотоп. инв.

$$H^j_{Nis}(U,\mathcal{F})=0$$

Рассмотрим спектральную последовательность

$$H^r(X, R^s_{p_*}(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{r+s}(X,\mathcal{F})$$



по л. 2

$$0 \longrightarrow \underbrace{H^i(X,R^0p_*(\mathcal{F}))}_{\text{гр. эффект}} \longrightarrow H^i(X,\mathcal{F}) \xrightarrow[\text{гр. эффект}]{} H^0(X,R^ip_*(\mathcal{F}))$$

— точная последовательность

Давайте вспомним, что при доказательстве теоремы для $i=1$ аналогичная последовательность и использовалась. А именно, наличие такой последовательности позволяло свести вопрос о гомотопической инвариантности $H^1(X,\mathcal{F})$ к Лемме:

$\boxed{\text{Лемма}}$ Y — гладкое локальное, $D\subset Y$ — гладкий дивизор

$$\rightsquigarrow H^1(Y\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F}) \hookrightarrow H^1((Y-D)\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F})$$

Вопрос о гомотопической инвариантности H^i по той же схеме сводится к инъективности $H^i(Y\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F})\hookrightarrow H^i((Y-D)\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F})$

$\boxed{\text{Лемма}\ 3}$ Y — гл. лок., $D\hookrightarrow Y$ — гл. дивизор

$$\Rightarrow\quad H^i(Y\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F})\hookrightarrow H^i((Y-D)\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F})$$

<u>Док-во</u> Достаточно доказать, что $H^i_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F})=0$ $(**)$

Подготовимся к доказательству равенства $(**)$

Пусть T — гл. лок., $S\hookrightarrow T$ — гладкий дивизор

$$\begin{array}{cc} S & T \\ \updownarrow & \updownarrow \\ D\times\mathbb{A}^1\cap T & Y\times\mathbb{A}^1 \end{array}$$

Тогда

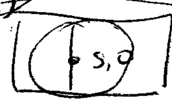
$$\overset{0\ (i-1\geq 1)}{\overset{\|}{H^{i-1}(T,\mathcal{F})}}\to H^{i-1}(T-S,\mathcal{F})$$

$$\xrightarrow{\partial} H^i_S(T,\mathcal{F})\to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^i(T,\mathcal{F})}$$

т.к. T-локальное

$$H^i_S(T,\mathcal{F})=\frac{H^{i-1}(T-S,\mathcal{F})}{H^{i-1}(T,\mathcal{F})}$$

$S\times 0$



$\mathcal{V}$

По предположению индукции $H^{i-1}(-,\mathcal{F})$ — гомотопически инвариантный предпучок с трансферами.

$$\frac{G(\mathbb{G}_m\times S)}{G(\mathbb{A}^1\times S)}\xrightarrow{\sim}\frac{G(\mathcal{V}-S\times 0)}{G(\mathcal{V})}$$

зигзаг изоморфизмов

$$H^i_S(T,\mathcal{F})=\frac{H^{i-1}(T-S,\mathcal{F})}{H^{i-1}(T,\mathcal{F})}=[H^{i-1}(-,\mathcal{F})]_{-1}(S)=\frac{H^{i-1}(S\times\mathbb{G}_m,\mathcal{F})}{\underbrace{H^{i-1}(S,\mathcal{F})}_{=0}}=H^{i-1}(S\times\mathbb{G}_m,\mathcal{F})$$

Итак, $H^i_S(T,\mathcal{F})=H^{i-1}(S\times\mathbb{G}_m,\mathcal{F})$ $(****)$

$(W\mapsto H^{i-1}(W\times\mathbb{G}_m,\mathcal{F}))$ — гомотопически инвариантный предпучок с трансферами

S-локально

$$\Rightarrow H^{i-1}(S\times\mathbb{G}_m,\mathcal{F})\hookrightarrow H^{i-1}(\mathbb{G}_{m,k(S)},\mathcal{F})$$

Чтобы закончить доказательство Леммы 3, достаточно доказать, что $H^{i-1}(\mathbb{G}_{m,k(S)},\mathcal{F})=0$.

Заменим $k(S)$ на k' и заметим, что $i-1\geq 1$

Напомним, что $\forall W\hookrightarrow\mathbb{A}^1_{k'}$ имеется короткая точная посл-ть

$$0\to\mathcal{E}(W)\to\mathcal{E}(k'(t))\to\bigoplus_{w\in W}\mathcal{E}_{-1}(w)\to 0 \quad \text{точна}$$

① У $\mathcal{F}$ есть резольвента

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \eta_*(\mathcal{F}(k'(t))) \longrightarrow \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1} i_{x,*}(\mathcal{F}_{-1}(x)) \longrightarrow 0 \qquad (***)$$

— точная последовательность пучков на $\mathbb{A}^1_{k'}$

(здесь $\operatorname{Spec} k'(t) \xhookrightarrow{\eta} \mathbb{A}^1_{k'}$ — общая точка)

— поскольку

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \longrightarrow \mathcal{F}(k'(t)) \longrightarrow \mathcal{F}_{-1}(k(x)) \longrightarrow 0$$

точна.

② Пучки $\eta_*(\ldots)$ и $\bigoplus i_{x,*}(\ldots)$ точны

Итак, $(***)$ — вялая резольвента $\mathcal{F}$ на $\mathbb{A}^1_{k'}$

$$\Rightarrow H^r(W, \mathcal{F}) = H^r\Big(\mathcal{F}(k'(t)) \longrightarrow \bigoplus_{w \in W} \mathcal{F}_{-1}(k'(w))\Big)$$

$W \subset \mathbb{A}^1_{k'}$ (0)

$$\bigoplus_{w \in \mathbb{A}^1}^{(1)} \mathcal{F}_{-1}(k'(w)) \longrightarrow 0$$

сюрьективна: $\mathcal{F}_{-1}(k'(w)) = \dfrac{\mathcal{F}(k(t))}{\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})}$

Если $r > 1$, то это $H^r = 0$

Если $r = 1$, то тоже, поскольку

$\cancel{\alpha \in \mathcal{F}(\eta) \quad \mathcal{F}(\eta) \quad \mathcal{F}(\mathcal{O}_{K,x}) \quad \mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x})}$

Хотим посчитать
$$H^1\Big[\mathcal{F}(k'(t)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1} \mathcal{F}_{-1}(k'(x))\Big]$$
$$\parallel$$
$$H^1(\mathbb{A}^1_{k'}, \mathcal{F}) = H^1(\operatorname{Spec}(k'), \mathcal{F}) = 0$$

Пусть теперь T — гладкое любое, $S \hookrightarrow T$ — гладкий дивизор

$\boxed{\text{Подлемма } \boxed{1}}$ Тогда $\forall\, i \geq 2$ $\quad H^i_S(T, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^0(T, \mathcal{H}^i_S(T, \mathcal{F}))$

Допустим, что подлемма верна. Докажем $(**)$.

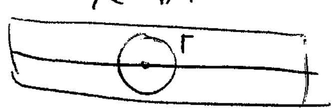
$$H^i_{D \times \mathbb{A}^1}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(X \times \mathbb{A}^1, \underbrace{\mathcal{H}^i_{D \times \mathbb{A}^1}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})})$$

$y \notin D \times \mathbb{A}^1$

$0 = \mathcal{H}^i_{D \times \mathbb{A}^1}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})_y$

$X \times \mathbb{A}^1$

$D \times \mathbb{A}^1$



Γ

$S := D \times \mathbb{A}^1 \cap T$

$$\mathcal{H}^i_{D \times \mathbb{A}^1}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})_x$$
$$\parallel$$
$$H^i_S(T, \mathcal{F}) = 0$$

по $(***)$

Д-во Подлеммы 1

$$H^i(T, \mathcal{H}^j_S(T, F)) \Rightarrow H^{i+j}_S(T, F)$$

$H^0(T, \mathcal{H}^i_S(T,F))$ $\quad$ $H^1(T, \mathcal{H}^{i-1}$

$\uparrow$ гр. эффект

$H^i_S(T, F)$

$H^i(T, \mathcal{H}^0_S(T, F))$

$i=2$

$H^2_S(T,F) \nearrow H^0(T, \mathcal{H}^2_S(T,F))$ $\quad$ $H^1(T, \mathcal{H}^1_S(T,F))$

$H^2(T, \mathcal{H}^0_S(T,F)) = 0$

м. считать, что
T — локально
$\Downarrow$

$$0 \to \mathcal{H}^0_S(T, F) \to F(T) \hookrightarrow F(T-S)$$

$\mathcal{H}^0_S(T,F) = 0$

$$H^i(Y\times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^j_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1, F)) \Longrightarrow H^{i+j}_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1, F):$$

$H^0(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^i_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$

$H^1(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{i-1}_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$

$H^{i-2}(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^2_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$

$H^{i-1}(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^1_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$

$H^i(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$ $\quad$ $H^{i+1}(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$

Ут-в. Все $H^j(-, \mathcal{H}^{i-j}_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$ равны 0 при $j>0$

Допустим, это верно. Тогда краевой эффект

$$H^i_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1, F) \longrightarrow H^0(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^i_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1)) \text{ — инъективен}$$

Д-во утверждения: смотрим на $H^i(Y\times\mathbb{A}^1, \underline{\mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1)}) = ?$

смотрим на ростках $\rightsquigarrow$ $Y\times\mathbb{A}^1$ можно заменить на локальные T,

$D\times\mathbb{A}^1$ — на локальное S $\rightsquigarrow$ $0 \to H^0_S(T,F) \to F(T) \to F(T-S)$

инъекция $\Rightarrow H^0_S(T,F) = 0$

Далее: $H^{i-2}(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^2_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$

— достаточно посмотреть на ростки

В доказательстве Леммы 3 была $\boxed{\text{Лемма } 3'}$ T — гладкий локальный,

$S \hookrightarrow T$ — гладкий дивизор

из условия индукции в теореме

$\Rightarrow \mathcal{H}^j_S(T,\mathcal{F})=0$ при $i \geq j \geq 2$

$in\times id: D\times\mathbb{A}^1 \hookrightarrow Y\times\mathbb{A}^1$

$\mathcal{H}^1_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \cong$ пучку $\mathcal{F}_{-1}$, посаженному на $Y\times\mathbb{A}^1$,

т.е. $(in\times id)_*(\mathcal{F}_{-1})$

$$H^{i-1}(D\times\mathbb{A}^1,\mathcal{F}_{-1}) = H^{i-1}(Y\times\mathbb{A}^1, (in\times id)_*(\mathcal{F}_{-1})) = H^{i-1}(Y\times\mathbb{A}^1, \mathcal{H}^1_{D\times\mathbb{A}^1}(Y\times\mathbb{A}^1))$$

$\Vert$ $\quad H^{i-1}(-,\mathcal{F}_{-1})$ — гомотопически инвариантен (предп. индукции)

$$H^{i-1}(D,\mathcal{F}_{-1}) \hookrightarrow H^{i-1}(\eta_D,\mathcal{F}_{-1}) = 0$$

$\rightsquigarrow$ утверждение доказано $\rightsquigarrow$ подлемма 1 доказана $\longrightarrow$ (**)

На самом деле, все эл-ты в спектралке выше первой строки равны 0 по лемме $3'$ и предположению индукции