25.04.2013

И.А. Панин

F — совершенное поле $\rightsquigarrow$

$$DM^-(F) \hookrightarrow D^-(NSwT)$$

$DM^-(F)$ — полная подкатегория; триангулированная категория мотивов

$D^-(NSwT)$ — производная категория ограниченных сверху компл. пучков Нисневича с трансферами

$A^\bullet$ — пучки когомологий $\underline{h^i}(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны. Такой $A^\bullet$ называется <u>мотивным комплексом</u>

Построим (еще раз) функтор $C^\bullet$ (триангулированный), левый сопряженный к i.

Кроме того, $\forall$ гладкого X над F можно рассмотреть пучок $\mathbb{Z}_{tr}[X] \in NSwT \to$ тогда $\underbrace{C^\bullet(\mathbb{Z}_{tr}[X])}_{M(X):=} \in DM^-(F)$ — <u>мотив</u> X

Получим функтор $M: Sm/_F \longrightarrow DM^-(F)$

Мы читаем Suslin–Voevodsky; Bloch–Kato conjecture and motivic cohomology, §1.

$\boxed{\text{Теорема}}$ $H_{Nis}(X, A^\bullet) \cong Hom_{DM^-(F)}(M(X), A^\bullet[i])$

$\boxed{\text{Lemma 1.2}}$ $\mathcal{F}$ — предпучок с трансферами

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{Nis}$ — предпучок с трансферами и $\mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{Nis}$ — морфизм предпучков с трансферами

(уже доказывали)

$\boxed{\text{Lemma 1.3}}$ $NSwT_{hom.inv} \hookrightarrow NSwT$

$NSwT_{hom.inv}$ — полная подкатегория, состоящая из гомотопически инвариантных предпучков.

$NSwT$ — абелева категория (следствие L.1.2)

Тогда $NSwT_{hom.inv}$ замкнута относительно взятия ядер, коядер морфизмов и относительно расширений

$\boxed{\text{Следствие}}$ (из L. 1.3.) 1) Пусть $B^\bullet$ — комплекс в $NSwT_{hom.inv}$.

Тогда $\underline{h^i}(B^\bullet) \in NSwT_{hom.inv}$

2) Пусть $\mathcal{F} \in NSwT$ и $(0) = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$

— фильтрация такая, что $\mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1} \in NSwT_{hom.inv}$.

Тогда $\mathcal{F} \in NSwT_{hom.inv}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\forall \mathcal{F} \in NSwT$ определим

$$C^i(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\Delta^i_F \times \mathcal{U}) =: \mathcal{F}(\Delta^i \times U)$$

$$C^i(\mathcal{F}) \xrightarrow[\sum(-1)^j \partial_j^*]{\partial^i} C^{i-1}(\mathcal{F})$$ – стандартный дифференциал

$\rightsquigarrow$ получаем комплекс $C^\bullet(\mathcal{F})$

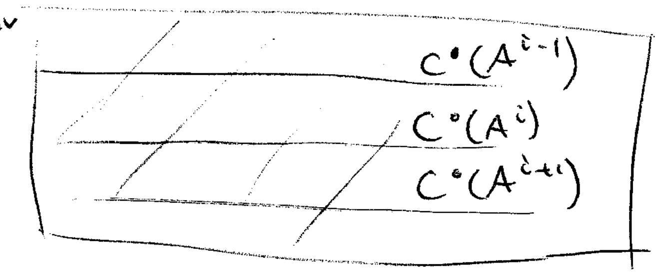
$\boxed{\text{Теорема}}$ $\underline{h}^i(\mathcal{F}) \in NSwT_{hom.inv}$.

(уже было)

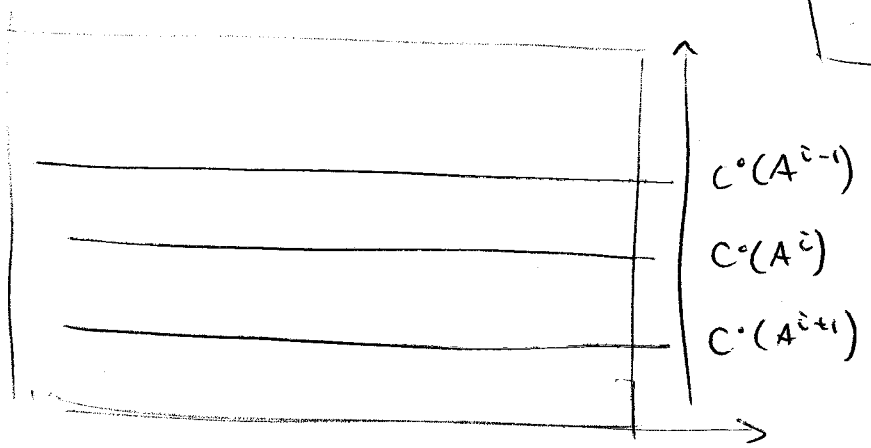
$\underline{\text{Док-во}}$ Предпучки $h^i(C^\bullet(\mathcal{F}))$ – гомотопически инвариантные предпучки с трансферами $\rightsquigarrow \underline{h}^i(C^\bullet(\mathcal{F}))$ – гомотоп. инв. пучки $\square$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $A^\bullet$ – ограниченный сверху комплекс в $NSwT$. Положим $C^\bullet(A^\bullet) := \mathrm{Tot}(C^\bullet(A^\bullet))$

$\boxed{\text{Lemma 1.4.}}$ $\underline{h}^i(C^\bullet(A^\bullet)) \in NSwT_{hom.inv}$



Бикомплекс



$$E_1^{p,q} = h^p(C^\bullet(A^q)) \Rightarrow \underline{h}^{p+q}(C^\bullet(A^\bullet))$$

Дано: $E_1^{p,q} \in NSwT_{hom.inv.}$ $\forall p,q$

Поэтому $\Downarrow$ $E_2^{pq} \in NSwT_{hom.inv}$ (по первой части Следствия)

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$E_\infty^{pq} \in NSwT_{hom.inv}$

$\underline{h}^{p+q}(C_*^\bullet(A^\bullet)) \in NSwT_{hom.inv}$

(по второй части Следствия)

$\boxed{\text{Опр.}}$ $DM^-(F) \hookrightarrow D^-(NSwT)$ как выше

полная подкатегория

триангулированная категория

Лемма 1.4. показывает, что $\forall A^\bullet \in D^-(NSwT)$ комплекс $C^\bullet(A^\bullet)$ лежит в $DM^-(F)$.

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\forall X \in Sm/F$ положим $\underbrace{M(X)}_{\text{мотив } X} := C^\bullet(\mathbb{Z}_{tr}[X]) \in DM^-(F)$

$\boxed{\text{Теорема 1.5}}$ $\forall A^\bullet \in DM^-(F)$ $\forall X \in Sm/F$

$$H^i_{Nis}(X, A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{DM^-(F)}(M(X), A^\bullet[i])$$

Ближайшая цель: доказать Теорему 1.5

Сначала докажем, что $H^i_{Nis}(X, A^\bullet) = \mathrm{Ext}^i_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], A^\bullet)$, а потом — что $\mathrm{Ext}^i_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{DM^-(F)}(M(X), A^\bullet[i])$

$$\begin{tikzcd} DM^-(F) \arrow[r, hook, "i"] & D^-(NSwT) \arrow[l, bend right, "C^\bullet"'] \arrow[r, hook, "j"] & D^-(Shv_{Nis}) \arrow[l, bend right, "\text{навешивание трансферов}"'] \end{tikzcd}$$

полная подкатегория

Грубо говоря, мы хотим доказать две сопряженности.

$X \longrightarrow \mathbb{Z}_{tr}[X]$ — можно расширить до функтора $Shv_{Nis} \to NSwT$ (левое расширение Кана)

$\boxed{\text{Предложение 1.8}}$ Пусть $A^\bullet \in D^-(NSwT)$. Тогда $\forall X \in Sm/F$ $\forall i$ $H^i_{Nis}(X, A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(\mathbb{Z}_{tr}[X], A^\bullet[i])$

$\boxed{\text{Утв. 1.7.1}}$ $\forall \mathcal{F} \in NSwT$ $\forall i$: $H^i_{Nis}(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^i_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], \mathcal{F})$

Док-во $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow I^\bullet$ — инъективная резольвента в $NSwT$ $\Rightarrow \forall r$ I^r ацикличен как пучок Нисневича, т.е. $H^j_{Nis}(Y, I^r) = 0$ $\forall j > 0$

$$H^i_{Nis}(X, \mathcal{F}) = H^i\big(\Gamma(X, I^0) \longrightarrow \Gamma(X, I^1) \longrightarrow \dots\big)$$

$$\| \in NSwT \qquad\qquad \|$$

$$H^i\big(\mathrm{Hom}_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], I^0) \to \mathrm{Hom}_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], I^1) \to \dots\big) =$$

$$= \mathrm{Ext}^i_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], \mathcal{F})$$

$\square$

Док-во Предложения 1.8.

$$\begin{tikzcd} A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{J}^{\bullet\bullet} \\ A^\bullet \arrow[r] & I^{\bullet\bullet} \end{tikzcd}$$

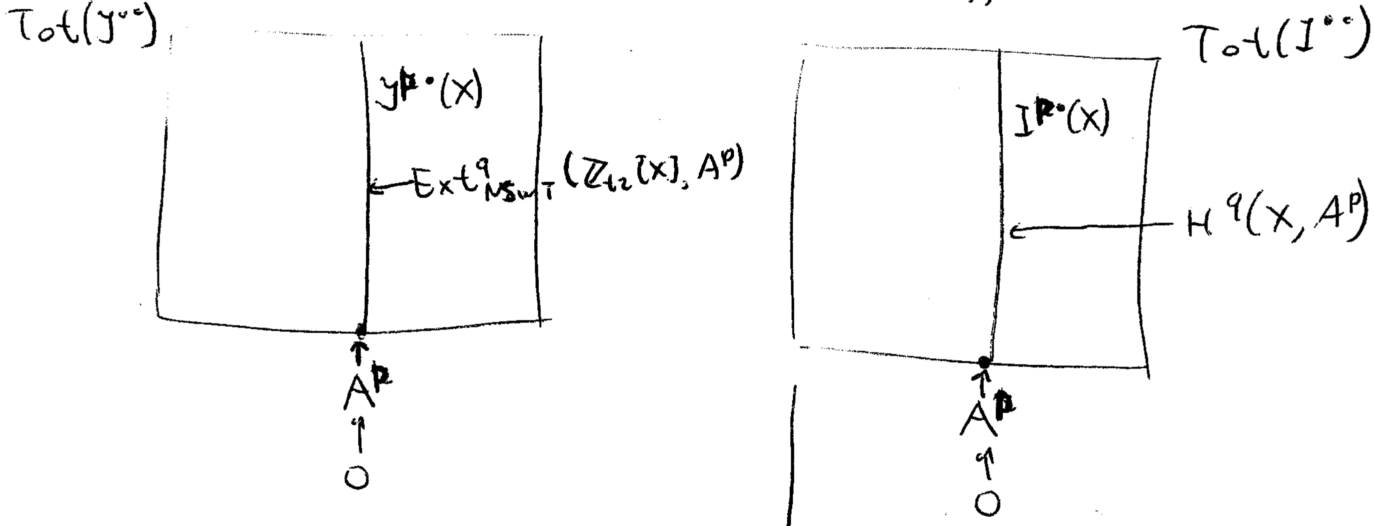
$A^\bullet \to \mathcal{J}^{\bullet\bullet}$ — инъективная замена в кат. NSwT

квази-изоморфизмы

$A^\bullet \to I^{\bullet\bullet}$ — инъективная замена в кат. Shv_{Nis}

Есть стрелка $\mathcal{J}^{\bullet\bullet} \longrightarrow I^{\bullet\bullet}$ такая, что квадрат коммутативен с точностью до гомотопии степени $(0,-1)$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{D^-(NSwT)}(\mathbb{Z}_{tr}[X], A^\bullet[i]) \arrow[r, equal] \arrow[d] & H^i(Tot(\mathcal{J}^{\bullet\bullet})(X)) \arrow[d, "?"] \\ H^i_{Nis}(X, A^\bullet) \arrow[r, equal] & H^i(Tot(I^{\bullet\bullet})(X)) \end{tikzcd}$$



$E^{q,p} = Ext^{q}_{NSwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], A^p) \Rightarrow H^{p+q}(Tot(\mathcal{J}^{\bullet\bullet})(X))$ | $E^{q,p} = H^q_{Nis}(X, A^p) \Rightarrow H^{p+q}(Tot(I^{\bullet\bullet})(X))$

$\sim$

изоморфизм по Утв. 1.7.1 $\Longrightarrow$ изоморфизм!

$\rightarrow$ доказали Предл. 1.8

$\square$

$\boxed{\text{Утв. } 1.8'}$ Пусть $A^\bullet \in DM^-(F)$. Тогда

$$\operatorname{Hom}_{D^-(NSwT)}(\mathbb{Z}_{tr}[X], A^\bullet[i]) = \operatorname{Hom}_{DM^-(F)}(\underset{\substack{\parallel \\ C^\bullet(\mathbb{Z}_{tr}[X])}}{M(X)}, A^\bullet[i])$$

Для доказательства Утверждения 1.8′ нужна предварительная подготовка.

$\boxed{\text{Опр.}}$ Предпучок $\mathcal{F}$ называется <u>$\mathbb{A}^1$-стягиваемым</u>, если существует морфизм предпучков $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow C^1(\mathcal{F})$
$$\begin{tikzcd} C^1(\mathcal{F}) \arrow[r, "\partial^1"] \arrow[dr, "\partial^0"'] & \mathcal{F} \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$
такой, что $\partial^0_* \circ \mathcal{F} = 0$, $\partial^1_* \circ \mathcal{F} = id$

Иными словами, для каждого $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ можно „естественным" образом выбрать сечение $\varphi(s) \in \mathcal{F}(\mathbb{A}^1 \times \mathcal{U})$ так, что $\varphi(s)\big|_{0\times\mathcal{U}} = 0$ и $\varphi(s)\big|_{1\times\mathcal{U}} = s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$

Для предпучка с трансферами $\mathcal{G}$ можно дать аналогичное определение.

$\boxed{\text{Замечание}}$ Если $\mathcal{F}$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваемый предпучок, то $\tilde{\mathcal{F}}_{Nis}$ — тоже $\mathbb{A}^1$-стягиваемый.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^\sim \arrow[r] & C^1(\mathcal{F})^\sim \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{F}^\sim \\ & & \mathcal{F}^\sim \end{tikzcd}$$

$$C^1(\mathcal{F})^\sim(\mathcal{U}) = \mathcal{F}^\sim(\mathbb{A}^1\times\mathcal{U})$$

— отсюда это как-то следует.

$\boxed{\text{Lemma 1.9}}$ $\forall \mathcal{F}$ $\forall n<0$ $\forall$ итерированной грани

$\partial: C^n(\mathcal{F}) \longrightarrow C^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$

$Ker(\partial)$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваем.

<u>Док-во</u>. покажем только случай $n=1$ (общий — аналогично)

Рассмотрим $\mathcal{K} = Ker(\partial_0 : C^1(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F})$

$\mathcal{K}(X) = \{s \in \mathcal{F}(X\times\mathbb{A}^1) : s\big|_{X\times 0} = 0\}$

$m: \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ — умножение

$(a,b) \longmapsto ab$

Положим $\varphi(s) = (id_X \times m)^*(s) \in \mathcal{F}(X\times\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1)$

$$\begin{tikzcd} (x,0) & & (x,t,0) \arrow[ll, mapsto] \\ X\times\mathbb{A}^1 & & X\times\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1 \arrow[ll, "id\times m"'] \\ X \arrow[u, "i_0"] & & X\times\mathbb{A}^1 \arrow[u, "I_0"'] \arrow[ll, "p_X"] \\ x \arrow[uuu, mapsto, bend left] & & (x,t) \arrow[ll, mapsto, bend left] \arrow[uuu, mapsto, bend right] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \varphi: \mathcal{K}(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{K}(X\times\mathbb{A}^1) \arrow[d, hook] \\ \mathcal{F}(X\times\mathbb{A}^1_{(2)}) \arrow[r, "(id\times m)^*"] \arrow[d, "i_0^*"] & \mathcal{F}(X\times\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_{(2)}) \arrow[d, "I_0^*"] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[r, "p_X^*"] & \mathcal{F}(X\times\mathbb{A}^1) \end{tikzcd}$$

$$\partial_0 \varphi(s) \overset{?}{=} \varphi(s)\Big|_{X\times 0\times \mathbb{A}^1} = 0$$

$$\| $$

$$I_0^*(\varphi(s)) = 0, \text{ т.к. } \varphi(s)\in \ker(I_0^*)$$

$$I_1^*\circ(id\times m)^* = ((id\times m)\circ I_1)^* = id^*_{X\times\mathbb{A}^1} = id$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_1\varphi(s) = id_{\mathcal{K}(X)}$$

Предложение 1.10 Пусть G и $\mathcal{F}$ — пучки Нисневича (соотв. пучки Нисневича с трансферами). Пусть G — $\mathbb{A}^1$-стягиваем, а $\mathcal{F}$ — строго гомотопически инвариантен (т.е., $\mathcal{F}$ гомотопически инвариантен и все $H^i_{Nis}(-,\mathcal{F})$ гомотопически инвариантны; например, $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами, который гомотопически инвариантен). Тогда $Ext^i_{Nis}(G,\mathcal{F})=0\ \forall i>0$ (соотв. $Ext^i_{NSwT}(G,\mathcal{F})=0\ \forall i>0$)

Доказательство — в следующий раз.

Следствие 1.10.1 Пусть $G,\mathcal{F}\in NSwT$, $\mathcal{F}$ гомотопически инвариантен, и G допускает конечную резольвенту вида

$$0\longrightarrow G\longrightarrow G^0\longrightarrow\ldots\longrightarrow G^n\longrightarrow 0,$$

где G^i — $\mathbb{A}^1$-стягиваемы. Тогда $Ext^i_{NSwT}(G,\mathcal{F})=0$

Д-во a) $n=0$ $\rightsquigarrow$ G — $\mathbb{A}^1$-стягиваем $\Rightarrow$ по Предл. 1.10 $Ext^i_{NSwT}(G,\mathcal{F})=0$.

b) $n=1$ $\quad 0\longrightarrow G\longrightarrow G^0\longrightarrow G^1\longrightarrow 0$

$$\leftarrow Hom(G,\mathcal{F})\leftarrow Hom(G^0,\mathcal{F})\leftarrow Hom(G^1,\mathcal{F})\leftarrow 0$$

$$\ldots\leftarrow \underset{\substack{\|\\ 0}}{Ext^1(G,\mathcal{F})}\leftarrow \underset{\substack{\|\\ 0}}{Ext^1(G^0,\mathcal{F})}\leftarrow \underset{\substack{\|\\ 0}}{Ext^1(G,\mathcal{F})}$$

$$\Leftarrow$$

c) $E_1^{p,q} = \underset{\substack{\|\\ 0\\ \text{по Предл. 1.10}}}{Ext^p_{NSwT}(G^q,\mathcal{F})} \Rightarrow \underset{\substack{\|\\ 0}}{Ext^{q-p}_{NSwT}(G,\mathcal{F})}$

$$\Longrightarrow$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\boxed{1.10.2}$ Пусть $A^\bullet \in D^-(NSwT)$.

Пусть $\forall i$ A^i — $\mathbb{A}^1$-стягиваем в $NSwT$ и пусть $\forall i$ $\underline{h}^i(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны.

Тогда $A^\bullet$ ацикличен, то есть, $\underline{h}^i(A^\bullet)=0$

<u>Док-во</u> Обратная индукция по i.

Если $i \gg 0$, то $\underline{h}^i(A^\bullet)=0$. Пусть $\underline{h}^j(A^\bullet)=0$ при $j>i$.

Рассмотрим комплекс

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{Z}^i \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & A^i \arrow[r, "d^i"] & A^{i+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^n \arrow[r] & 0 \\ & \mathrm{Ker}(d^i) & & & & & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{A}^1$-стягиваемы

(по 1.10.1)

$$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{NSwT}(\underline{h}^i(A^\bullet), \mathcal{Z}^i) = 0$$

гом.инв.

С другой стороны, $\mathcal{Z}^i \twoheadrightarrow \underline{h}^i(A^\bullet)$ — канон. сюръекция

$$\rightsquigarrow \mathrm{Hom}(\underline{h}^i(A^\bullet), \underline{h}^i(A^\bullet)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{Z}^i, \underline{h}^i(A^\bullet)) = 0$$

$$\rightsquigarrow id_{\underline{h}^i(A^\bullet)} = 0 \Rightarrow \underline{h}^i(A^\bullet) = 0 \qquad \square$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ G — $\mathbb{A}^1$-стягиваем, $\mathcal{F}$ — гомотоп. инвариантен

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \mathrm{Hom}(G, \mathcal{F}) = 0$$

$$\begin{tikzcd} & & G \\ G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[urr, bend left, "id_G"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & \mathcal{H}om(\mathbb{A}^1, G) \arrow[ur, "i_1^* = \partial_1"] \arrow[dr, "i_0^* = \partial_0"'] & \\ & & G \end{tikzcd}$$

где $\mathcal{H}om(\mathbb{A}^1, G)(U) = G(U \times \mathbb{A}^1)$

$\alpha \in \mathrm{Hom}(G, \mathcal{F})$

$\Downarrow$

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathcal{F} \\ G \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "id"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & \mathcal{H}om(\mathbb{A}^1, G) \arrow[ur, "i_1^*"] \arrow[dr, "i_0^*"'] \arrow[rr] & & \mathcal{H}om(\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \arrow[ur, "i_1^* \wr"] \arrow[dr, "i_0^* \wr"'] & \\ & & G \arrow[rr, "\alpha"'] & & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \alpha = 0$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Shv} \arrow[r, shift left, "\overline{C}_0"] & \mathrm{Shv}_{hom.inv} \arrow[l, hook', shift left] \\ \mathrm{Shv}_{\mathbb{A}^1\text{-стяг}} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

сопряжены.

$$G \longmapsto \overline{C}_0(G) = 0$$