напоминание

Предпучок $\mathcal{F}$ на Sm называется **$\mathbb{A}^1$-стягиваемым**, если
$\exists\ \varphi: \mathcal{F} \longrightarrow C^{-1}(\mathcal{F})$ т.ч.

$$C^{-1}(\mathcal{F})(X) = \mathcal{F}(\Delta^1_F \times X) \overset{\partial^0}{\underset{\partial^1}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(X)$$

$\partial_0 \circ \varphi = 0$

$\partial_1 \circ \varphi = id$ т.е. $s \in \mathcal{F}(X) \rightsquigarrow \varphi(s) \in \mathcal{F}(\mathbb{A}^1_F \times X) : \varphi(s)\big|_{X\times 0} = 0,\ \varphi(s)\big|_{X\times 1} = s$

Лемма $\forall$ предпучка $\mathcal{F}$ пусть $\partial_n : C^{-n}(\mathcal{F}) \longrightarrow C^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$;
тогда $Ker(\partial_n)$ стягиваемо.

Замечание $\mathcal{F}$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваемый $\Longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_{Nis}$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваемый

$$C^n(\mathcal{F})(X) = \mathcal{F}(\Delta^n_F \times X)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}(\Delta^n_F \times X) & & \Delta^n_F \arrow[d] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[ur, "p^*"] & & & pt = Spec(F) \end{tikzcd}$$

$$Coker(p^*) \cong Ker(\partial^n)$$

$$\begin{tikzcd} Ker(i_0^*) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}(\Delta^1_F \times X) \arrow[r, "i_0^*"] & \mathcal{F}(X) \\ & \mathcal{F}(X) \arrow[u, "p^*"] \arrow[ur, dashed, "id"'] & \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow coker(p^*)$

В частности, $Coker(p^*)$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваем

$$\begin{tikzcd} C^{-3}(\mathcal{F}) \arrow[r] & C^{-2}(\mathcal{F}) \arrow[r] & C^{-1}(\mathcal{F}) \arrow[r] & C^0(\mathcal{F}) \\ \mathcal{F} \arrow[u, hook, "p_3^*"] \arrow[r, "0"] & \mathcal{F} \arrow[u, hook, "p_2^*"] \arrow[r, "id"] & \mathcal{F} \arrow[u, hook, "p_1^*"] \arrow[r, "0"] & \mathcal{F} \arrow[u, hook, "p_0^*"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{c} : C^\bullet(\mathcal{F}) \\ \uparrow \\ : \mathcal{F}^{const} = C^{0\bullet}(\mathcal{F}) \end{array}$$

посмотрим на фактор-комплекс $C^\bullet(\mathcal{F}) / C^{0\bullet}(\mathcal{F})$.

Все его члены $\mathbb{A}^1$-стягиваемы

При этом
$$\begin{array}{c} \mathcal{F} \longmapsto C^\bullet(\mathcal{F}) \\ \cup \qquad\quad \uparrow \\ \mathcal{F} \longmapsto C^{0\bullet}(\mathcal{F}) \end{array}$$
функториальны по $\mathcal{F}$ и преобразование функторов

$\rightsquigarrow \mathcal{F} \longmapsto C^\bullet(\mathcal{F}) / C^{0\bullet}(\mathcal{F})$ — фактор функторов

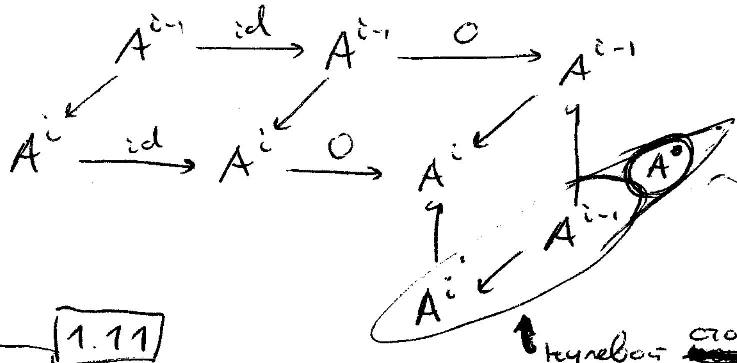
Если $\longrightarrow A^\bullet$ — огр. сверху

$\longrightarrow$ есть бикомплексы $C^{0\bullet}(A^\bullet)$ и $C^\bullet(A^\bullet)$ такие, что

$$\underbrace{C^{0\bullet}(A^\bullet) \longrightarrow C^\bullet(A^\bullet)}_{\text{гомоморфизм бикомплексов}} \longrightarrow C^\bullet(A^\bullet) / C^{0\bullet}(A^\bullet) \longleftarrow \text{все его члены — } \mathbb{A}^1\text{-стягиваемы}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "0"] & \mathcal{F} \arrow[r, "id"] & \mathcal{F} \arrow[r, "0"] & \mathcal{F} \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[u, "id"']
\end{tikzcd}
$$

квази-изоморфизм комплексов



$\rightsquigarrow A^\bullet \longrightarrow C^{0\bullet}(A^\bullet)$

квазиизоморфизм

нулевой столбец

Предложение 1.11 Пусть $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс пучков Нисневича с трансферами. ① Если $\forall n$ A^n — $\mathbb{A}^1$-стягиваем, то $C^\bullet(A^\bullet)$ — ацикличен, т.е. $=0$ в $DM^-(F)$:

$$
\begin{tikzcd}
A^\bullet \in D^-(NSwT) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "c^\bullet \downarrow \; \uparrow i"] & {} \\
C^\bullet(A^\bullet) \in DM^-(F) & {}
\end{tikzcd}
$$

② Если $\forall n$ $\underline{h}^n(A^\bullet)$ — гомотопически инвариантно, то $A^\bullet \longrightarrow C^\bullet(A^\bullet)$ — квази-изоморфизм

Следствие 1.10.2 (напоминание) $B^\bullet$ — огр. сверху комплекс пучков Нисневича с трансферами, пусть все его члены $\mathbb{A}^1$-стягиваемы, а все его $\underline{h}^i(B^\bullet)$ гомотопически инвариантны. Тогда $B^\bullet$ ацикличен

Док-во (1) Если $\forall n$ A^n — $\mathbb{A}^1$-стягиваем, то $\forall i \forall n$ $C^i(A^n)$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваем $\Rightarrow$ все члены комплекса $C^\bullet(A^\bullet)$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваемы. $\forall j$ $\underline{h}^j(C^\bullet(A^\bullet))$ — гомотоп. инвариантен. Поэтому $C^\bullet(A^\bullet)$ ацикличен.

(2) Имеется точная последовательность

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{0\bullet}(A^\bullet) \arrow[r, "\alpha"] & C^\bullet(A^\bullet) \arrow[r] & C^\bullet(A^\bullet)/C^{0\bullet}(A^\bullet) \arrow[r] & 0 \\
& A^\bullet \arrow[u, "\text{квази-изоморфизм}"'] \arrow[ur, bend right] & & &
\end{tikzcd}
$$

$\underline{h}^i(C^\bullet(A^\bullet))$ — гомотоп. инвариантны

$\rightsquigarrow \underline{h}^i(C^{0\bullet}(A^\bullet))$ — гомотоп. инвариантны

$\rightsquigarrow \underline{h}^i\left(C^\bullet(A^\bullet)/C^{0\bullet}(A^\bullet)\right)$ — гомотопически инвариантны,

и все члены $C^\bullet(A^\bullet)/C^{0\bullet}(A^\bullet)$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваемы. По Следствию 1.10.2 $C^\bullet(A^\bullet)/C^{0\bullet}(A^\bullet)$ — ацикличен. Поэтому α — квази-изоморфизм. □

Следствие 1.11.1 Пусть $B^\bullet, A^\bullet \in D^-(NSwT)$ — огр. сверху. Пусть $\forall n$ B^n — $\mathbb{A}^1$-стягиваем, $\forall n$ $\underline{h}^n(A^\bullet)$ гомотоп. инвариантны. Тогда

$$\mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(B^\bullet, A^\bullet) = 0$$

Док-во: Достаточно доказать, что $\forall f: B^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ — морфизм комплексов — образ f в $D^-(NSwT)$ равен нулю. Пусть $g \in \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(B^\bullet, A^\bullet)$

$$\begin{tikzcd} & I^\bullet \\ B^\bullet \arrow[ur, "\varphi"] & A^\bullet \arrow[u, "\alpha", "\sim"'] \end{tikzcd} \longrightarrow \text{в } D^-(NSwT) \quad g = [\alpha^{-1}]\circ\varphi$$

Мы знаем, что $\underline{h}^n(A^\bullet) = h^n(I^\bullet)$ — гомотоп. инварианты

Осталось показать, что $[\varphi]=0$ в $D^-(NSwT)$

$$\begin{tikzcd} B^\bullet \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A^\bullet \arrow[d] \\ C^\bullet(B^\bullet) \arrow[r, "C^\bullet(\varphi)"] \arrow[d, equal] & C^\bullet(A^\bullet) \\ 0 & \end{tikzcd}$$

квази-изоморфизм по Предл. 1.11 (2)

по Предл. 1.11 (1)

$\square$

$\boxed{\text{Следствие} \mid 1.11.2}$ $B^\bullet, A^\bullet \in D^-(NSwT)$.

Пусть $\underline{h}^n(A^\bullet)$ гомотопически инвариантен $\forall n$. Тогда морфизм

$$\begin{tikzcd} B^\bullet \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & C^{0\bullet}(B^\bullet) \arrow[r] & C^\bullet(B^\bullet) \end{tikzcd}$$

индуцирует изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(\underset{\underset{DM^-}{\Uparrow}}{C^\bullet(B^\bullet)}, \underset{\underset{DM^-}{\Uparrow}}{A^\bullet}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(B^\bullet, A^\bullet) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Hom}_{DM^-(F)}(C^\bullet(B^\bullet), A^\bullet) & & \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(B^\bullet, i(A^\bullet)) \end{array}$$

т.е. функтор $C^\bullet$ сопряжен слева к i.

Док-во $\mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(C^\bullet(B^\bullet)/C^{0\bullet}(B^\bullet), A^\bullet) = 0$ по Сл. 1.11.1

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(C^\bullet(B^\bullet), A^\bullet) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(B^\bullet, A^\bullet) \\ & \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(C^{0\bullet}(B^\bullet), A^\bullet) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(C^\bullet(B^\bullet)/C^{0\bullet}(B^\bullet), A^\bullet[1]) \end{tikzcd}$$

— квази-изоморфизм по наивным причинам

$C^{0\bullet}(B^\bullet) \longrightarrow C^\bullet(B^\bullet) \longrightarrow C^\bullet(B^\bullet)/C^{0\bullet}(B^\bullet)$

$\rightsquigarrow$ есть длинная точная посл-ть; в ней каждый третий член $=0$

$\square$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\forall X \in Sm/F\ \forall i$: $\mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(M(X), A^\bullet[i])$
$\forall A^\bullet \in DM^-(F)$

$$\| $$

$$\mathrm{Hom}_{D^-(NSwT)}(\mathbb{Z}_{tr}(X), A^\bullet[i])$$

$$\left(\overset{\|}{\mathrm{Ext}^i_{NSwT}}(\mathbb{Z}_{tr}(X), A^\bullet) = H^i_{Nis}(X, A^\bullet)\right)$$

Док-во: $M(X) = C^\bullet(\mathbb{Z}_{tr}(X)) \rightsquigarrow$ по Сл. 1.11.2 все доказано □

$\boxed{\text{Замечание}}$ Таким образом, $\mathrm{Hom}_{DM^-(F)}(M(X), A^\bullet[i]) = H^i_{Nis}(X, A^\bullet)$.

$$\begin{tikzcd} D^-(NSwT) \arrow[d, shift right, "C^\bullet"'] \\ DM^-(F) \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

// для негладкого X нужна cdh-топология, разрешение особенностей, ...

Пусть $A^\bullet$ ацикличен $\Rightarrow \underline{h}^i(A^\bullet) = 0 \Rightarrow h^i(A^\bullet)$ — гомотоп. инвариантны
$\left(s \in h^i(A^\bullet)(X \times \mathbb{A}^1) \rightsquigarrow \text{все ростки } s \text{ равны } 0.\right)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} C^\bullet(A^\bullet) \\ \uparrow \longleftarrow \text{квази-изоморфизм} \\ A^\bullet \text{ — ацикличен} \end{array}\right\} \Rightarrow C^\bullet(A^\bullet) \text{ ацикличен}$$

Пусть $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ — квази-изоморфизм $\rightsquigarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \longrightarrow Cone(f)$

$$\rightsquigarrow C^\bullet(A^\bullet) \xrightarrow{C^\bullet(f)} C^\bullet(B^\bullet) \longrightarrow Cone(C^\bullet(f))$$

$$? \| \longleftarrow \text{как-то очевидно}$$

$$C^\bullet(Cone(f))$$

$Cone(f)$ ацикличен $\Rightarrow C^\bullet(Cone(f))$ ацикличен $\Rightarrow C^\bullet(f)$ — квази-изоморфизм

(например

$$A(\Delta^n \times X) \hookrightarrow B(\Delta^n \times X) \longrightarrow (B/A)(\Delta^n \times X)$$
$$\|$$
$$C^{-n}(B/A)(X)$$
$$B(\Delta^n \times X)/A(\Delta^n \times X)$$
)

Поэтому $C^\bullet$ — эндофунктор на $D^-(NSwT)$

Пусть $\mathcal{A} := Ker(C^\bullet)$.

$\boxed{\text{Теорема}}$ ① $C^\bullet$ — триангулированный функтор, коммутирует с прямыми суммами

② $C^\bullet$ — левый сопряженный к i и устанавливает эквивалентность

$$D^-(NSwT)/\mathcal{A} \longrightarrow DM^-(F)$$

$\boxed{\text{Предложение 1.14}}$ ① Если $X \in Sm/F$, $x_0 \in X(F)$ и пара (X, x_0) — $\mathbb{A}^1$-стягиваема, то $\forall Y \in Sm/F$ пучок

$$\mathbb{Z}_{tr}(Y \times X)/\mathbb{Z}_{tr}(Y \times x_0) \text{ — } \mathbb{A}^1\text{-стягиваем}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ (X, x_0) — $\mathbb{A}^1$-стягиваема к точке x_0, если

$$\exists \varphi : X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X : \varphi|_{X \times 1} = id,\ \varphi|_{X \times 0} : X \xrightarrow[x_0]{} X$$

(2) Категория $\mathcal{A}$ слабо порождена стягиваемыми пучками вида $\mathbb{Z}_{tr}(Y \times \mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}_{tr}(Y \times 0)$

т.е., $DM^-(F)$ — локализация $D^-(NSwT)$ в соотв. с $\mathcal{A}$,

а $\mathcal{A}$ порождена стандартными стягиваемыми пучками

Мы пока не затрагивали тензорную структуру:

можно было бы сказать, что $\mathcal{A}$ — идеал, порожденный пучком $\mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}_{tr}(0)$..

В след. раз покажем, что $\mathrm{Ext}^i(\underset{\mathbb{A}^1\text{-стяг.}}{G}, \underset{\text{гомотоп.инв.}}{F}) = 0 \quad \forall i$