13.05.2013

И.А. Панин

$$\begin{tikzcd} D^{-}(NSwT) \arrow[d, shift right, "C^{\bullet}"'] \\ DM^{-}(F) \arrow[u, shift right, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

$DM^{-}(F) = \{A^{\bullet} \mid \forall i \ \ h^{i}(A^{\bullet})$ — гомотоп. инв.$\}$

Мы показали, что $C^{\bullet}$ — левый сопр. к $i$

$\mathcal{A} = Ker(C^{\bullet}) \hookrightarrow D^{-}(NSwT)$

$DM^{-}(F)$ — это локализация $D^{-}(NSwT)$ по $\mathcal{A}$

и $C^{\bullet}$ — функтор локализации

$\boxed{\text{Предложение}}\boxed{1.14}$

Категория $\mathcal{A}$ порождена как триангулированная категория пучками вида $\mathbb{Z}_{tr}(\cancel{X} \times \mathbb{A}^{1}) / \mathbb{Z}_{tr}(X \times 0) =: \mathbb{Z}_{tr}(X \times \mathbb{A}^{1} / X \times 0)$

$\boxed{\text{Лемма}}\boxed{1.13}$

$A^{\bullet} \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow A^{\bullet}$ изоморфен в $D^{-}(NSwT)$ комплексу $B^{\bullet}$ такому, что $\forall i$ $B^{i} \in NSwT$ — это $\mathbb{A}^{1}$-стягиваемый пучок Нисневича с трансферами

Док-во "$\Rightarrow$": Если $A^{\bullet} \in \mathcal{A}$, то $C^{\bullet}(A^{\bullet})$ ацикличен, т.е. нулевой объект в $D^{-}(NSwT)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^{0\bullet}(A^{\bullet}) \arrow[r, "j_A"] & C^{\bullet}(A^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\text{в } D^{-}(NSwT)"] & coker(j_A) \arrow[r] & 0 \\ & A^{\bullet} \arrow[u, "\wr"] & 0 & & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow coker(j_A) \simeq C^{0\bullet}(A^{\bullet})[1] \xleftarrow{\sim} A^{\bullet}[1]$

состоит из $\mathbb{A}^{1}$-стягиваемых пучков Нисневича с трансферами

"$\Leftarrow$": Пусть $A^{\bullet}$ таков, что $\forall i$ $A^{i}$ — $\mathbb{A}^{1}$-стягиваем.
Тогда $\forall i$ все члены комплекса $C^{\bullet}(A^{i})$ тоже $\mathbb{A}^{1}$-стягиваемы.
Поэтому все члены бикомплекса $C^{\bullet}(A^{\bullet})$ $\mathbb{A}^{1}$-стягиваемы. С другой стороны, $\forall n$ $\underline{h}^{n}(C^{\bullet}(A^{\bullet}))$ гомотоп. инв. $\Rightarrow C^{\bullet}(A^{\bullet})$ ацикличен $\Rightarrow A^{\bullet} \in \mathcal{A}$ $\square$

## Док-во Предложения 1.14

(a) $\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}_{tr}(X\times 0) \in \mathcal{A}$ ?

Мы уже доказывали, что эти пучки $\mathbb{A}^1$-стягиваемы.

$\rightsquigarrow$ по Лемме 1.13 $\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1/X\times 0)\in\mathcal{A}$

$\forall A^\bullet\in\mathcal{A}$ $\quad A^\bullet \underset{\text{в } D^-(NSwT)}{\cong} B^\bullet$ $\quad$ : $\forall i$ $B^i$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваемый пучок Нисневича с трансферами.

$\Rightarrow$ достаточно доказать, что любой $\mathbb{A}^1$-стягиваемый имеет резольвенту, члены которой — прямые суммы пучков вида $\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1/X\times 0)$.

Более того, резольвенту указанного вида напишем $\forall F\in\mathcal{A}$, т.е. такого, что $C^\bullet(F)$ ацикличен.

Для $F$ хотим придумать морфизм $\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1)\xrightarrow{\varphi_s} F$

$\Updownarrow$ лемма Йонеды

$s\in F(X\times\mathbb{A}^1)$

и хотим, чтобы $\varphi_s$ пропустился через $\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1/X\times 0)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}_{tr}(X\times 0) \arrow[dr, dashed] & \\
\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1) \arrow[u] \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

т.е. $\varphi_s|_{\mathbb{Z}_{tr}(X\times 0)}=0$

$\Updownarrow$

$s|_{X\times 0}=0$ в $F(X\times 0)$

при $i_0^*$: $F(X\times\mathbb{A}^1) \to F(X\times 0)$

т.е. задать морфизм $\dfrac{\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1)}{\mathbb{Z}_{tr}(X\times 0)} \xrightarrow{\varphi_s} F$, $\quad \varphi_s = \varphi_{X,s}$

$\Updownarrow$

задать $s\in F(X\times\mathbb{A}^1)$ т.ч. $s|_{X\times 0}=0$

Заметим, что

$C^\bullet(F)$ ацикличен $\Rightarrow$ $C^1(F)\xrightarrow{\partial^1-\partial^0} C^0(F)$ — сюръективный морфизм пучков, $C^0(F) = F$

$$\bigoplus_{X\in Sm/F}\ \bigoplus_{\substack{s\in F(X\times\mathbb{A}^1):\\ s|_{X\times 0}=0}} \mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1/X\times 0)\xrightarrow{\varphi_0=\sum\varphi_{X,s}} F$$

Тогда $\varphi_0$ — сюръекция в пучках Нисневича

Действительно, по замечанию выше

$$\forall X\ \forall s \in \mathcal{F}(X)\ \exists\, \mathcal{U} \xrightarrow{\text{Нисн.}} X \quad \exists\, t \in \mathcal{F}(\mathcal{U}\times\mathbb{A}^1):$$

$$t|_{\mathcal{U}\times 1} - t|_{\mathcal{U}\times 0} = s|_{\mathcal{U}}.$$ Положим

$$t^{const} = pr_{\mathcal{U}}(t|_{\mathcal{U}\times 0}) \in \mathcal{F}(\mathcal{U}\times\mathbb{A}^1) \quad \text{и} \quad t^{new} = t - t_{const}$$

при этом $t^{new}|_{\mathcal{U}\times 0} = 0$ и $t^{new}|_{\mathcal{U}\times 1} - t^{new}|_{\mathcal{U}\times 0} = s|_{\mathcal{U}}$

$\rightsquigarrow$ для $s \in \mathcal{F}(X)$ мы нашли $\mathcal{U} \longrightarrow X$

и $t^{new} \in \mathcal{F}(\mathcal{U}\times\mathbb{A}^1)$ т.ч. $t^{new}|_{\mathcal{U}\times 0} = 0$ $\rightsquigarrow$ $t^{new}$ задает

$$\mathbb{Z}_{tr}(\mathcal{U}\times\mathbb{A}^1/\mathcal{U}\times 0) \longrightarrow \mathcal{F}$$

$\rightsquigarrow$ мы построили

$$K \xrightarrow{=\ker(\varphi_0)} \bigoplus_{X\in Sm/F}\ \bigoplus_{\substack{s\in\mathcal{F}(X\times\mathbb{A}^1)\\ s|_{X\times 0}=0}} \mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1/X\times 0) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{Z}_{tr}(X\times\mathbb{A}^1/X\times 0) \in \mathcal{A}, \qquad \mathcal{F} \in \mathcal{A}$$

$\rightsquigarrow K \in \mathcal{A}$ $\rightsquigarrow$ итерируем процесс $\square$

$\boxed{\text{Предложение} \mid 1.10}$ $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ — пучки Нисневича (соотв. из $NSwT$)

При этом (1) $\mathcal{G}$ — $\mathbb{A}^1$-стягиваем; (2) $\mathcal{F}$ строго гомотопически инвариантен

($\forall i$ $X \longmapsto H^i(X,\mathcal{F})$ гомотопически инвариантен)

// для $NSwT$ достаточно, чтобы $\mathcal{F}$ был гомотопически инвариантен

Тогда $\forall j$ $\quad Ext^j(\mathcal{G},\mathcal{F}) = 0$ $\quad$ (соотв. $Ext^j_{NSwT}(\mathcal{G},\mathcal{F}) = 0$)

---

Почему $Hom(\mathcal{G},\mathcal{F}) = 0$? $\varphi\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$

Взяли ненулевое сечение $\mathcal{G}$, его можно потянуть к $0$,

поэтому образ можно потянуть к $0$, но $\mathcal{F}$ гомотоп. инвариантен

$\rightsquigarrow$ этот образ равен $0$

$\exists \varphi:$

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{F} \\
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[urr, bend left, "id"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & C^{-1}(G) \arrow[ur, "i_1^*"] \arrow[dr, "i_0^*"'] \arrow[r, "C^{-1}(\rho)"] & C^{-1}(\mathcal{F}) \arrow[ur, "i_1^*", "\sim"'] \arrow[dr, "i_0^*", "\wr"'] & \\
 & & G \arrow[r, "\rho"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{F} \\
\wr & \\
C^{-1}(G) \arrow[r, "C^{-1}(\rho)"] & C^{-1}(\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) & \mathcal{F}(X\times \mathbb{A}^1) \arrow[l, "i_0^*"'] \arrow[r, "i_1^*"] & \mathcal{F}(X) \\
 & \mathcal{F}(X) \arrow[ul, "id"] \arrow[u] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow i_0^* = i_1^*$$

$\rightsquigarrow \rho = 0$

## Д-во Предложения 1.10

Пусть $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow I^\bullet$ — инъективная резольвента

Предпучки когомологий комплекса $C^{-1}(I^\bullet)$ заданы так:

$$X \longmapsto H^i_{Nis}(X\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \overset{(2)}{=} H^i_{Nis}(X, \mathcal{F})$$

Если $i>0$, то ассоциированные пучки равны $0$

$$H^0(X\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

Итак,

$$\begin{tikzcd}
 & C^{-1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^{-1}(I^\bullet) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$
— резольвента для $\mathcal{F}$ (по строгой гомотоп. инв-сти)

$$\begin{tikzcd}
 & & I^\bullet \\
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[urr, bend left] \arrow[drr, bend right] & C^{-1}(I^\bullet) \arrow[ur, "i_1^*"] \arrow[dr, "i_0^*"'] & \\
 & & I^\bullet
\end{tikzcd}$$
$\Rightarrow i_1^*$ и $i_0^*$ гомотопны

$\Rightarrow \exists s_n : C^{-1}(I^n) \longrightarrow I^{n-1}:\quad d s_n + s_{n+1} C^{-1}(d) = i_1^* - i_0^*$

Пусть $\varphi: G \longrightarrow C^{-1}(G)$ делает $G$ $\mathbb{A}^1$-стягиваемым

Мы хотим написать стягивающую гомотопию для $Hom(G, I^\bullet)$

$$f \in Hom(G, I^n) \xrightarrow{u_n} Hom(G, I^{n-1}) \ni u_n(f) := s_n C^{-1}(f)\varphi$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrr, bend right, dashed] & C^{-1}(G) \arrow[r, "C^{-1}(f)"] & C^{-1}(I^n) \arrow[r, "s_n"] & I^{n-1}
\end{tikzcd}$$

$$G \xrightarrow{f} I^n$$

Проверим, что это стягивающая гомотопия: $\partial u_n + u_{n+1}\partial = id$ (только для первого члена):

$n=0$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(G,I^0) & \\
 & \operatorname{Hom}(G,I^0) \arrow[ul] \arrow[u, "id"] \arrow[r, "\partial"] & \operatorname{Hom}(G,I^1) \arrow[ul, "u_1"']
\end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Hom}(G,I^0) \ni g \longmapsto \partial g = f = d\circ g \in \operatorname{Hom}(G,I^1)$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrrr, bend right, "?= g"] \arrow[ddrr, bend right, "id"'] & C^{-1}(G) \arrow[rr, "C^{-1}(d\circ g)"] \arrow[dr, bend left, "C^{-1}(g)"] \arrow[ddr, bend right, "i_{1*}-i_{0*}"'] & & C^{-1}(I^1) \arrow[r, "s_1"] & I^0 \\
 & & C^{-1}(I^0) \arrow[ur, bend right, "C^{-1}(d)"'] \arrow[urr, bend right, "i_1^*-i_0^*"'] & & \\
 & & G \arrow[uurr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

□