

Тензорная структура: Voevodsky - Suslin, §2
(Bloch-Kato conj. and ...)

$$M(X) \otimes M(Y) \xrightarrow{\sim} M(X \times Y)$$

$$\uparrow \text{ в } DM^{-}(F)$$

F — совершенное поле

Предложение 2.8 Существует (явно представляемый) функтор

$$\otimes : DM^{-}(F) \times DM^{-}(F) \longrightarrow DM^{-}(F)$$

такой, что

- ① ассоциативный, коммутативный (с точностью до естественных изоморфизмов)
- ② переводит точные треугольники по каждой переменной в точные треугольники (двухточные)
- ③ коммутирует с прямыми суммами

// в DM^{-} с прямыми суммами нужно быть аккуратными:
это не компактно порожденная категория

$$\textcircled{4} \quad \forall A^{\bullet}, B^{\bullet} \in D^{-}(NS_{\omega T}): \quad D^{-}(NS_{\omega T}) \xrightarrow{C^{\bullet}} DM^{-}(F)$$

$$A^{\bullet} \otimes^L B^{\bullet} \xrightarrow{\quad} C^{\bullet}(A^{\bullet} \otimes^L B^{\bullet})$$

$$\uparrow \uparrow$$

$$C^{\bullet}(A^{\bullet}) \otimes_{DM^{-}} C^{\bullet}(B^{\bullet})$$

В частности, $\forall X, Y \in Sm/F$

$$M(X \times Y) \xleftarrow{\sim} M(X) \otimes M(Y)$$

$$\parallel \qquad \parallel_{DM^{-}(F)}$$

$$C^{\bullet}(\mathbb{Z}_{\ell 2}[X \times Y]) \quad C^{\bullet}(\mathbb{Z}_{\ell 2}[X]) \otimes C^{\bullet}(\mathbb{Z}_{\ell 2}[Y])$$

$$\mathbb{Z}_{\ell 2}[X \times Y] = \mathbb{Z}_{\ell 2}[X] \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell 2}}^L \mathbb{Z}_{\ell 2}[Y] \quad \text{в } D^{-}(NS_{\omega T})$$

$$\swarrow \quad \downarrow \leftarrow \text{в } D^{-}(NS_{\omega T})$$

$$\text{в } NS_{\omega T} \quad \mathbb{Z}_{\ell 2}[X] \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell 2}} \mathbb{Z}_{\ell 2}[Y]$$

Хочется

- ① Построить $\otimes_{\ell 2}^{pre}$ на $PreTr$ (предпуках с трансферами)
- ② Построить $\otimes_{\ell 2}$ на $NS_{\omega T}$
- ③ Построить $\otimes^L$ на $D^{-}(NS_{\omega T})$
- ④ Построить $\otimes$ на $DM^{-}(F)$

(1) $\leadsto$ (2) : Взять $\bigotimes_{t_2}^{pre}$ и спутывать: получится $\bigotimes_{t_2}$

(2) $\leadsto$ (3) : $\chi^*(F) \quad \chi^*(G)$ — резольвенты из прямых сумм $\mathbb{Z}_{t_2}(-)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $F \quad \bigotimes^L \quad G$

$$\leadsto \chi^*(F) \bigotimes_{t_2} \chi^*(G) \\ (\chi^*(F) \bigotimes \mathbb{Z}_{t_2}(X))$$

Допустим, что F — предпучок такой, что $(F)^\sim = 0$. Верно ли, что

$$(F \bigotimes_{t_2}^{pre} \mathbb{Z}_{t_2}(X))^\sim = 0 ?$$

т.е. $\chi^*(F)$ — проект. резольвенты в предпучках, а не в пучках, и у них должны быть ~~хорошие~~ хорошие св-ва (ациклическость):

$\mathbb{Z}_{t_2}[X]$ как пучок относительно $\bigotimes_{t_2}^{pre}$

$PreSh$
 $\downarrow$ — локализация
 $NSwT$

$\bigotimes_{t_2}^{pre}$
 $\downarrow$ индуцирует
 $\bigotimes_{t_2}$

Для этого надо знать, что ядро локализации — идеал относительно $\bigotimes_{t_2}^{pre}$

$$\mathcal{H} \in PreSh : \mathcal{H}^\sim = 0 \Rightarrow \forall F \in NSwT \quad (\mathcal{H} \bigotimes_{t_2}^{pre} F)^\sim = 0$$

$$\text{— для этого достаточно } (\mathcal{H} \bigotimes_{t_2}^{pre} \mathbb{Z}_{t_2}(X))^\sim = 0$$

Для перехода (2) $\Rightarrow$ (3) нужно знать, что

$\bigotimes_{t_2} \mathbb{Z}_{t_2}(X)$ — точный функтор из $NSwT$ в $NSwT$

Тогда получим $\bigotimes^L$ на $D^-(NSwT)$

(3) $\leadsto$ (4) : $\mathcal{A} = \text{Ker}(C^*)$ — „идеал“ в $D^-(NSwT)$ относительно $\bigotimes^L$.

Предложение 2.7 $\mathcal{A}$ — идеал относительно $\bigotimes^L$ в $D^-(NSwT)$

т.е. $A^* \in \mathcal{A}, B^* \in D^-(NSwT) \Rightarrow A^* \bigotimes^L B^* \in \mathcal{A}$

Доказ. $\mathcal{A}$ порождена пучками вида $\mathbb{Z}_{t_2}(y \times A^1) / \mathbb{Z}_{t_2}(y \times 0)$

$D^-(NSwT)$ порождена пучками вида $\mathbb{Z}_{t_2}[X]$

$$\mathbb{Z}_{t_2}(y \times A^1) / \mathbb{Z}_{t_2}(y \times 0) \bigotimes^L \mathbb{Z}_{t_2}(X)$$

$$= \mathbb{Z}_{t_2}(y \times A^1) / \mathbb{Z}_{t_2}(y \times 0) \bigotimes_{t_2} \mathbb{Z}_{t_2}(X) = \mathbb{Z}_{t_2}(y \times A^1) / \mathbb{Z}_{t_2}(y \times 0) \quad \boxed{2}$$

Итак, определим $\otimes_{\mathbb{Z}}^{\text{pre}}$ с такими свойствами:

- ① коммутует с любыми $\oplus$
- ② коммутует с $\otimes$ в каноническом смысле с абелевыми группами
- ③ точно справа
- ④ $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\text{pre}} \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(Y) = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(X \times Y)$

$$0 \longleftarrow F \longleftarrow \bigoplus_{X \in S_m} F(X) \otimes \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(X) :$$

$$F(U) \longleftarrow (F(X) \otimes \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(X))(U)$$

$$\varphi^*(s) \longleftarrow s \otimes \varphi$$

$$U \xrightarrow{\varphi} X$$

$$F(U) \xleftarrow{\varphi^*} F(X)$$

$$\varphi^*(s) \longleftarrow \frac{s}{\varphi}$$

$$0 \longleftarrow F \longleftarrow \bigoplus_{X \in S_m} F(X) \otimes \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(X) \longleftarrow \bigoplus_{f \in \text{Cor}(X, Y)} F(Y) \otimes \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(X) \longleftarrow$$

$$F(Y) \otimes \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(Y) \xleftarrow{\text{id} \otimes f_*} F(Y) \otimes \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(X)$$

$$F(X) \otimes \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}(X) \xleftarrow{f^* \otimes \text{id}}$$

$$\text{id} \otimes f_* - f^* \otimes \text{id}$$

Положим

$$(F \otimes_{\mathbb{Z}}^{\text{pre}} G)(Z) = \bigoplus_{X, Y \in S_m} F(X) \otimes G(Y) \otimes \text{Cor}(Z, X \times Y) \Big/ \Delta$$

$$f \in \text{Cor}(X', X), h \in \text{Cor}(Z, X \times Y), \varphi \in F(X), \psi \in G(Y) \Rightarrow$$

$$\textcircled{1} \varphi \otimes \psi \otimes (f \times 1_Y) \cdot h = f_{!0}^* \otimes \varphi \otimes h$$

$$F(X) \otimes G(Y) \otimes \text{Cor}(Z, X \times Y)$$

$$F(X') \otimes G(Y) \otimes \text{Cor}(Z, X' \times Y)$$

$$F(X') \otimes G(Y) \otimes \text{Cor}(Z, X \times Y)$$

$$\textcircled{2} \varphi \otimes \psi \otimes (1_X \times g)_* h - \varphi \otimes g^*(\psi) \otimes h$$

— аналогично выражает сопоставление по y

Постоянные точки A — предпучок с трансферами:

$$\left(\varphi \otimes_{t_2} \psi \right) \otimes A \rightarrow \varphi \otimes \left(\psi \otimes_{t_2} A \right)$$

$$A = A(y) \xleftarrow{z^*} A(x) = A \xrightarrow{\quad} y$$

$\bullet [z:y]$

$$z \subset y \times x$$

$$\varphi \otimes_{t_2}^{\text{pre}} A \xrightarrow{?} \varphi \otimes A$$

— т.е. рассадит A в точку и разнесет вдоль соответствия

Лемма 2.2 Пусть $F \in \text{Pre } T_2$,

$\tilde{F}_{Nis} = 0$. Тогда $\forall i \geq 0$

$$(L_i^X(F))_{Nis}^{\sim} = 0 \quad (\forall X \in S_n/F)$$

Опр.

$$Z_{t_2}^X \otimes_{t_2}^{\text{pre}} (-) : \text{Pre } T_2 \rightarrow \text{Pre } T_2$$

— точен справа. Пусть L_i^X —

его левые производные