21.02.2013

Теорема Атьи

А. Нешитов

G — компактная группа Ли, BG — ее классифицирующее пространство; тогда $\widehat{R(G)} = K_0(BG)$,

кольцо представлений, пополненное в I_G — идеал аугментации: $0 \to I_G \to R(G) \to \mathbb{Z} \to 0$

Что для алгебраических групп?

Если G — расщепимая редуктивная алгебраическая группа над k, то $BG \in \mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)$ и $\widehat{R(G)}_{I_G} \simeq K_0(BG)$

При этом $R(G) = K_0^G(\operatorname{Spec} k)$

Более того,
$$\widehat{K_n^G(\operatorname{Spec} k)}_{I_G} \simeq K_n(BG)$$

V — представление G, $G \curvearrowright X$ — G-торсор
$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ Y \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ можно рассмотреть
$$\begin{array}{c} X \times V/_G \\ \downarrow \\ Y \end{array}$$
— G-эквивариантное расслоение

Хотим построить
$$R(G) \longrightarrow K_0(BG)$$

конструкция Бореля

$BG = \varinjlim BG_i$ — гл. многообразия

построим $\quad \varinjlim \begin{array}{c} EG_i \\ \downarrow \\ BG_i \end{array} = \begin{array}{c} EG \\ \downarrow \\ BG \end{array}$

$$R(G) \longrightarrow K_0(BG)$$
$$V \longmapsto V \times EG/_G$$
— это для любой G.

Пусть теперь $G = T = \mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m$ — расщепимый тор

<u>Первый шаг</u>

Если $T = \mathbb{G}_m$, $\mathbb{G}_m \curvearrowright \mathbb{A}^n - 0 \rightsquigarrow \dfrac{\mathbb{A}^n - 0}{\mathbb{G}_m} = \mathbb{P}^{n-1}$

В топологии BG строится так:

$G \curvearrowright Y$ — свободное действие, стягиваемо $\rightsquigarrow Y/_G$ классифицирует все главные однородные G-пространства.

$\forall X$ есть $\left\{ \begin{array}{l} \text{гл. однор.} \\ \text{пр-ва над } X \end{array} \right\} \longleftrightarrow [X, Y/_G]$

$\rightsquigarrow B\mathbb{G}_m = \mathbb{P}^\infty$ — мотивное пространство
$$\mathbb{P}^\infty = \frac{\mathbb{A}^\infty - 0}{\mathbb{G}_m}$$

При этом $K_0(\mathbb{P}^\infty) = \varprojlim K_0(\mathbb{P}^n) = \varprojlim \mathbb{Z}[t]/t^{n+1} = \mathbb{Z}[[t]]$

Левая часть: $R(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}[\chi, \chi^{-1}]$

$$\begin{array}{ccc} R(\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \chi & \longmapsto & 1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad I_{\mathbb{G}_m} = (1-\chi)$$

$$\widehat{\mathbb{Z}[\chi, \chi^{-1}]}_{(1-\chi)} = \mathbb{Z}[[1-\chi]]$$

Конструкция Бореля:
$$\begin{array}{ccc} R(G) & \longrightarrow & K_0(\mathbb{P}^n) \\ \chi & \longmapsto & \mathcal{O}(-1) \\ 1-\chi & \longmapsto & 1-\mathcal{O}(-1) \end{array}$$

$\chi : \mathbb{G}_m \curvearrowright (\mathbb{A}^n - 0)$

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{A}^n - 0) \times \mathbb{G}_m / \mathbb{G}_m \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathbb{A}^n - 0 \arrow[d] \\ \mathbb{P}^{n-1} & \mathbb{P}^{n-1} \end{tikzcd}$$

Итак,
$$\begin{array}{ccc} \widehat{R(\mathbb{G}_m)} & & K_0(B\mathbb{G}_m) \\ & & \parallel \\ \parallel & & K_0(\mathbb{P}^\infty) \\ & & \parallel \\ \mathbb{Z}[[1-\chi]] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[[t]] \\ 1-\chi & \longmapsto & t \end{array}$$

<u>Второй шаг:</u> редукция к тору

Докажем, что
$$\begin{tikzcd} R(G) \arrow[r] \arrow[d, shift right] & K_0(BG) \arrow[d, shift right] \\ R(T) \arrow[r] \arrow[u, shift right] & K_0(BT) \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$
выделяются прямыми слагаемыми

т.е. можно построить вертикальные стрелки т.ч.

$$\begin{tikzcd} R(G) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "id"'] & K_0(BG) \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "id"] \\ R(T) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(BT) \arrow[d] \\ R(G) \arrow[r] & K_0(BG) \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \widehat{R(G)}_{I_G} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{K_0(BG)} & K_0(BG) \arrow[l] \arrow[d] \\ \widehat{R(T)}_{I_T} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \widehat{K_0(BG)} & K_0(BT) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\ \widehat{R(G)}_{I_G} \arrow[r] & \widehat{K_0(BG)} & K_0(BG) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ есть изоморфизм и на прямых слагаемых

Тонкость: $I_G = I_T \cap R(G)$, но $I_T \neq I_G \cdot R(T)$

Впрочем, $\sqrt{I_T} = \sqrt{I_G \cdot R(T)}$, поэтому они зададут одну и ту же топологию, и все получится.

$T \subset B \subset G$

B/T — аффинное пространство.

Почему $R(T) = R(B)$?

$BG = EG/G$ $\qquad$ $BB = EB/B$

$BT = EB/T$

$$\begin{tikzcd} B/T \arrow[r, "\sim"] & BT \arrow[r] & BB \end{tikzcd}$$

аффинно

$\rightsquigarrow K_n(BB) \xrightarrow{\sim} K_n(BT)$

в силу гомотопической инвариантности

$R(B) \xhookrightarrow{\sim} R(T)$

B разрешима, поэтому есть фильтрация с одномерными факторами, а одномерное представление B приходит из T

$T \curvearrowright B/T$

$$\begin{array}{ccc} K_0^T(pt) & = & K_0^B(pt) \\ & \diagdown\diagdown & \| \\ & & K_0^T(B/T) \end{array}$$

и все стрелочки — канонические

$\rightsquigarrow$ в средней строчке можно заменить T на B

Теперь G/B проективно.

Для простоты возьмем $G = SL_2$

$$\begin{array}{ccccc} & & BB & \xrightarrow{p} & BG \\ & & \| & & \| \\ G/B & \to & EB/B & \longrightarrow & EB/G \end{array}$$

$\rightsquigarrow p$ — проективный морфизм (точнее, предел проективных) со слоем G/B.

$\rightsquigarrow$ есть $p^* : K_0(BG) \longrightarrow K_0(BB)$

и $p_* : K_0(BB) \longrightarrow K_0(BG)$

$p_* \circ p^* = id$: $\quad p_* \circ p^*(X) = X \cdot p_*(1)$

и $p_*(1) = \sum h^i(G/B, \mathcal{O}_{G/B}) \cdot (-1)^i$

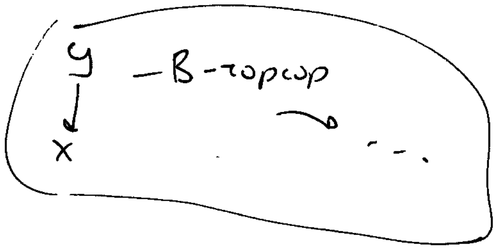
где $h^i(\cdot) = \dim(H^i(\ldots))$

но мы знаем, что $h^i(G/B) = \delta_{i,0}$

Как устроена стрелка $R(B) \longrightarrow R(G)$?

$R(B) = K_0^B(pt)$ $\qquad$ $\boxed{\begin{matrix} G \\ \downarrow \\ G/B \end{matrix}}$ — B-торсор

$R(G) = K_0^G(pt)$



$\rightsquigarrow R(B) = K_0^B(pt) = K_0^G(G/B)$

$R(G) = K_0^G(pt) \xleftarrow{p_*}$

Для SL_2:

$R[T] = \mathbb{Z}[\chi, \chi^{-1}]$

$R[SL_2] = \mathbb{Z}[\chi+\chi^{-1}, 1] = \mathbb{Z}[\chi+\chi^{-1}]$ — инв-ты отн-но действия $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$G/B = \mathbb{P}^1$ $\qquad$ $\chi^{-1} \longmapsto \mathcal{O}(1) \xleftrightarrow{p_*} \cancel{2}\, V_2 = \chi + \chi^{-1}$

$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = \langle x, y \rangle$ — пр-во однородных многочленов степени 1

$\chi^{-n} \longmapsto V_n = \{$многочлены степени n от $x, y\}$

(единственное неприводимое представление со ст. весом χ^{-n}

Мораль: $R(T) = \mathbb{Z}[$характеры $T]$

— доминантные веса

V^λ — неприводимое предст. со ст. весом λ