p-адическая лемма Пуанкаре*

Александр Лузгарев

21 мая 2014 г.

Содержание

Источники: статьи Бейлинсона [Bei12], [Bei13], лекции Иллюзи [Ill13], книги Иллюзи [Ill71], [Ill72]. . .

1 Введение

1.1 Когомологии Бетти и де Рама

1.1.1. Аналитический случай. Пусть X — гладкое аналитическое [комплексное] многообразие. Обозначим через $\mathbb{C}_X$ постоянный пучок $\mathcal{C}$ на X, а через $\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}$ комплекс де Рама голоморфных дифференциальных форм на X:

$$\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}} = (\mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/\mathbb{C}} \to \dots).$$

Структурный морфизм $\mathbb{C} \to \mathcal{O}_X$ индуцирует естественное отображение аугментации

$$\mathbb{C}_X \to \Omega^\bullet_{X\mathbb{C}}. \tag{1}$$

Классическая лемма Пуанкаре утверждает, что это отображение является квази-изоморфизмом. Если U — открытая звездчатая область в X, то отображение глобальных сечений $\mathcal{C} =$

*Конспект докладов на семинаре «Кристаллические когомологии» весны 2014 г.; предварительная версия.

$\Gamma(U, \mathbb{C}_X) \to \Gamma(U, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}})$ является гомотопической эквивалентностью комплексов (пространство $\Gamma(U, \mathbb{C}_X)$ мы воспринимаем здесь как комплекс, сконцентрированной в нулевой степени). Гомотопия здесь задается интегрированием форм из $\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}$ вдоль путей в U.

Из квази-изоморфизма 1 следует существование естественных изоморфизмов правых производных функторов $R\Gamma(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} R\Gamma(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}})$ и когомологий

$$H^*(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H^*(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}).$$

Левая часть изоморфна $H^*(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ и традиционно называется *когомологиями Бетти* (мы пишем $\mathbb{C}$ вместо $\mathbb{C}_X$ и $\mathbb{Q}$ вместо $\mathbb{Q}_X$), а правая часть называется *когомологиями де Рама* многообразия X.

1.1.2. Алгебраический случай. Перейдем к алгебраической ситуации: пусть теперь X — гладкая схема конечного типа над $\mathbb{C}$, а X^{an} — соответствующее ей аналитическое многообразие (*аналитификация* схемы X). Обозначим через $\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}$ комплекс де Рама *алгебраических* дифференциальных форм на схеме X (снабженной топологией Зариского). Аналогично аналитическому случаю, имеется и постоянный пучок $\mathbb{C}_X$ на X, однако естественная аугментация $\mathbb{C}_X \to \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}$ уже не является квази-изоморфизмом. Индуцированный морфизм $R\Gamma(X, \mathbb{C}) \to R\Gamma(X^{an}, \mathbb{C})$ также не является изоморфизмом. Объясняется это просто: топология Зариского очень груба; в частности, $H^i(X, \mathbb{C}) = 0$ для $i > 0$.

Теорема Гротендика, однако, утверждает, что

$$R\Gamma(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \to R\Gamma(X^{an}, \Omega^\bullet_{X^{an}/\mathbb{C}})$$

является изоморфизмом. Применяя (известный из аналитического случая) изоморфизм между когомологиями де Рама и Бетти, получаем цепочку

$$H^*(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} H^*(X^{an}, \Omega^\bullet_{X^{an}/\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} H^*(X^{an}, \mathbb{C}). \tag{2}$$

Кроме того, теорема об универсальных коэффициентах говорит нам, что

$$H^*(X^{an}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(H_*(X^{an}, \mathbb{Z}), \mathbb{C}).$$

Если схема X аффинна, то когомологии де Рама — это просто когомологии глобальных сечений комплекса де Рама: $H^*(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \cong H^*\Gamma(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}})$. Наконец, рассмотрим сквозной изоморфизм

$$H^*\Gamma(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H_*(X^{an}, \mathbb{Z}), \mathbb{C}). \tag{3}$$

Его легко записать в явном виде: классу дифференциальной формы ω ставится в соответствие отображение $H_*(X^{an}) \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto \pm \int_\gamma \omega$ интегрирования формы ω вдоль циклов на X^{an} (с точностью до знака). Комплексные числа $\int_\gamma \omega$ традиционно называются *периодами*, а указанный изоморфизм — *изоморфизмом периодов*.

Пример 1.1.2.1. Пусть $X = \mathbb{G}_m$ — мультипликативная группа над $\mathbb{C}$. Пространство $H^1(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}})$ порождается одним элементом $[\omega]$, где $\omega = dz/z$. Пространство $H_1(X, \mathbb{Z})$ порождается классом одного цикла $x \mapsto e^{2\pi i x}$, представляющего собой единичную окружность. Тогда отображение 3 переводит форму ω в линейное отображение, сопоставляющее этой окружности число $-2\pi i$.

1.1.3. Случай произвольного поля. Пусть теперь K — произвольное поле, X — схема над K. Гиперкогомологии комплекса де Рама $\Omega^\bullet_{X/K}$ мы, как обычно, обозначаем через $H^*(X, \Omega^\bullet_{X/K})$. Если X гладкая схема конечного типа над K, и $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ — некоторое вложение основного поля в $\mathbb{C}$, мы обозначаем через X^σ схему, полученную из X заменой базы на $\mathbb{C}$ при помощи σ: $X_\sigma = X \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. При этом имеется канонический изоморфизм

$$H^*(X, \Omega^\bullet_{X/K}) \otimes_{K,\sigma} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} H^*(X_\sigma, \Omega^\bullet_{X_\sigma/\mathbb{C}}).$$

После композиции с изоморфизмами 2 получаем изоморфизм периодов

$$H^*(X, \Omega^\bullet_{X/K}) \otimes_{K,\sigma} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} H^*(X_\sigma^{an}, \mathbb{C}) = H^*(X_\sigma^{an}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}. \tag{4}$$

Заметим, что этот изоморфизм существенным образом зависит от σ. Кроме того, уже для $K = \mathbb{Q}$ мы получили две рациональных $\mathbb{Q}$-структуры на $H^*(X^{an}, \mathbb{C})$. Они связаны изоморфизмом периодов, но пример 1.1.2.1 показывает, что этот изоморфизм вовсе не является рациональным (возникает загадочная константа 2π).

Если X — гладкая собственная схема над K, то обе стороны изоморфизма 4 обладают также естественными *фильтрациями Ходжа*, и оказывается, что изоморфизм 4 согласован с этими фильтрациями.

1.2 Теорема сравнения

1.2.1. Формулировка. Пусть K — поле характеристики 0, $\overline{K}$ — его алгебраическое замыкание, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ — его группа Галуа. Для отделимой схемы X конечного типа над K определены этальные когомологии $H^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}_l$, где l — произвольное простое число. Группа Галуа действует на этальных когомологиях, поэтому мы получаем конечномерное $\mathbb{Q}_l$-представление группы G_K. Если выбрано вложение $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ и его продолжение $\overline{\sigma}\colon \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$, то имеется изоморфизм сравнения

$$H^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{\cong} H^*(X_\sigma^{an}, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_l.$$

Он G_K-эквивариантным образом зависит от выбора $\overline{\sigma}$. Однако даже для гладкой собственной схемы X над K мы не можем сравнить полученное представление группы G_K с когомологиями де Рама $H^*(X, \Omega^\bullet_{X/K})$.

Дело обстоит лучше для p*-адического поля* K и $l = p$: пусть K — полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с совершенным полем вычетов k характеристики $p > 0$, кольцом целых $\mathcal{O}_K$. Для отделимой схемы X конечного типа над K можно определить морфизм сравнения

$$\rho^+_{dR}\colon R\Gamma_{dR}(X/K) \otimes B^+_{dR} \to R\Gamma(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes B^+_{dR},$$

где BdR^+ — некоторое специального вида кольцо Фонтена. Этот морфизм согласован со всеми структурами: действиями группы Галуа и фильтрациями Ходжа на когомологиях. Расширение этого морфизма до кольца B_{dR}

$$\rho_{dR}\colon R\Gamma_{dR}(X/K) \otimes B_{dR} \to R\Gamma(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes B_{dR},$$

является изоморфизмом.

Здесь $R\Gamma_{dR}(X/K)$ определено следующим образом:

- для собственного гладкого X над K положим $R\Gamma_{dR}(X/K) = R\Gamma(X, \Omega^\bullet_{X/K})$;

- для гладкого (но не обязательно собственного) X над K положим

$$R\Gamma_{dR}(X/K) = R\Gamma(\overline{X}, \Omega^{\bullet}_{\overline{X}/K}(\log D))$$

для любой гладкой собственной компактификации $\overline{X}$ схемы X такой, что $D = \overline{X} - X$ является дивизором с нормальными пересечениями (Делинь доказал, что правая часть не зависит от выбора $\overline{X}$). В любом случае $H^*_{dR}(X/K)$ снабжается *фильтрацией Ходжа*, индуцированной естественной фильтрацией комплексов де Рама, и полученная фильтрация Ходжа не зависит от выбора $\overline{X}$.

- для произвольного X над K нужно использовать собственное гиперпокрытие схемы X и выбрать его симплициальную компактификацию.

1.2.2. План доказательства.

1.3 Дополнительные ингредиенты

1.3.1. Альтернации. Важная часть доказательства использует теорию *альтернаций* (alterations), которая является вариантом разрешения особенностей. Напомним, что задача разрешения особенностей состоит в нахождении для схемы X гладкой схемы X' вместе с собственным бирациональным морфизмом $f\colon X' \to X$. Теорема Хиронака (1964) утверждает, что для схемы X над алгебраически замкнутым полем $k = \overline{k}$ характеристики 0 разрешение особенностей существует. Имеются ее сильные варианты: например, можно потребовать, чтобы f на $X - X^{\text{sing}}$ был изоморфизмом.

К сожалению, мы пока не знаем, выполняется ли разрешение особенностей (в достаточно общей ситуации) над полем произвольной характеристики. В 1995 году де Йонг (de Jong) предложил термин alteration: морфизм $f\colon X' \to X$ называется альтернацией, если он собственный, сюръективный и почти всюду конечный (generically finite). Он доказал, что для *произвольной* схемы X над произвольным полем k существует гладкая схема X' вместе с альтернацией $f\colon X' \to X$. Богомолов и Пантев, Абрамович и де Йонг доказали, что из этого следует теорема Хиронака (в слабой форме).

Доказательство де Йонга состоит из следующих шагов: прежде всего, нужно заменить X на расслоение $X \to B$, слои которого являются кривыми (возможно, с особенностями), разобраться с B с помощью индукции по размерности, и совершить разрешение особенностей для кривых (которое хорошо известно).

2 Предварительные сведения

2.1 Производный комплекс де Рама

2.1.1. Стандартная свободная резольвента. Пусть T — произвольный топос. Нам понадобится в основном случаи малого сайта Зариского (или этального сайта) над схемой X; полезно представлять себе определения и в тривиальном случае, когда T состоит из одной точки (пучки на одноточечном пространстве — это просто множества). Пусть A, B — кольца в T. Это означает, что A, B — кольцевые объекты в категории пучков на некотором сайте; в тривиальном случае это просто кольца, в случае сайта Зариского —пучки колец на схеме.

Для морфизма колец $A \to B$ в T мы сейчас определим *стандартную свободную резольвенту* B над A. Напомним, что у забывающего функтора R из категории [коммутативных] A-алгебр в категорию множеств имеется левый сопряженный L: он сопоставляет множеству X свободную полиномиальную A-алгебру $A[X]$. У этого сопряжения имеется единица $LR \to \mathrm{id}$ и коединица $\mathrm{id} \to RL$. В такой ситуации (для любой пары сопряженных функторов $R\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$) для объекта $X \in C$ можно определить симплициальный объект S, n-симплексы которого равны $S_n = (LR)^n X$, а грани и вырождения получены с помощью единицы и коединицы: $(LR)^i(LR)(LR)^{n-i-1}X \to (LR)^i(LR)^{n-i-1}X$, $L(RL)^i(RL)^{n-i-2}RX \to L(RL)^i(RL)(RL)^{n-i-2}RX$.

В нашей ситуации эта конструкция приводит к симплициальной алгебре $P^\bullet_A(B)$, n-симплексы которой выглядят так: $(P^\bullet_A(B))_0 = A[B]$, $(P^\bullet_A(B))_n = A[(P^\bullet_A(B))_{n-1}]$. Таким образом, все ее компоненты являются свободными A-алгебрами. Симплициальная алгебра $P^\bullet_A(B)$ снабжена естественной аугментацией $P^\bullet_A(B) \to B$, поэтому мы часто будем считать, что $P^\bullet_A(B)$ — аугментированная симплициальная алгебра, и $(P^\bullet_A(B))_{-1} = B$. Нетрудно проверить, что указанная аугментация является квази-изоморфизмом.

Конструкция симплициальной алгебры $P^\bullet_A(B)$ обладает следующими свойствами:

- *Функториальность*: пусть $A' \to B'$ — еще один морфизм колец в T, и имеется морфизм между этими морфизмами, то есть, коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

  Тогда возникает естественное отображение $P^\bullet_A(B) \to P^\bullet_{A'}(B')$, и оно согласовано со структурным морфизмом $A \to P^\bullet_A(B)$ и с аугментацией $P^\bullet_A(B) \to B$ (здесь, как и везде, мы отождествляем объект X с тривиальным симплициальным объектом, каждый n-симплекс которого равен X).

- *Перестановочность с индуктивными пределами*: если $(A_\lambda \to B_\lambda)_\lambda$ — направленная система морфизмов колец, то $\varinjlim P^\bullet_{A_\lambda}(B_\lambda) = P^\bullet_{\varinjlim A_\lambda}(\varinjlim B_\lambda)$.

- *Замена базы*: если $f\colon T' \to T$ — морфизм топосов, то $f^{-1}P^\bullet_A(B) = P^\bullet_{f^{-1}A}(f^{-1}B)$.

- *Шифификация*: если $A \to B$ — морфизм *предпучков* колец, и a — функтор шифификации, сопоставляющий предпучку на T ассоциированный пучок на T, то $aP^\bullet_A(B) = P^\bullet_{aA}(aB)$.

Симплициальные объекты в T также образуют топос; обозначим его через $\mathrm{Simpl}(T)$. Пусть теперь $A \to B$ — морфизм *симплициальных колец*, то есть, кольцевых объектов в $\mathrm{Simpl}(T)$. Тогда $P^\bullet_A(B)$ является бисимплициальным кольцом: его компоненты можно нарисовать на плоскости так, что его m-я строка $(P^\bullet_A(B))_m$ является алгеброй над симплициальным кольцом A, а n-й столбец $P_{A_n}(B_n)$ является симплициальной алгеброй над кольцом A_n. Полученное бисимплициальное кольцо снабжено структурой A-алгебры и аугментацией в B, если рассматривать A и B как бисимплициальные кольца, тривиальные в вертикальном направлении. Обозначим через Δ функтор диагонали, сопоставляющий бисимплициальному объекту его симплициальную диагональ. Нетрудно видеть, что имеется коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} \Delta P^\bullet_A(B) \arrow[r] & B \\ & A \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

симплициальных колец. Несложное упражнение с применением теоремы Эйленберга–Зильбера и спектральной последовательности бикомплексов показывает, что морфизм $\Delta P^\bullet_A(B) \to B$ является квази-изоморфизмом.

2.1.2. Кокасательный комплекс. Вернемся к ситуации, когда $A \to B$ — морфизм колец в T. Сопоставим этому морфизму *кокасательный морфизм* B *над* A: положим $L_{B/A} = \Omega^1_{P/A} \otimes_P B$, где $P = P_A(B)$, а Ω^1 — кэлеровы дифференциалы. По определению $L_{B/A}$ является симплициальным B-модулем. В силу того, что каждая компонента P является свободной A-алгеброй, мы знаем, как выглядят ее кэлеровы дифференциалы. Из этого знания немедленно следует, что $(L_{B/A})_n \cong B \otimes_A A^{(P_A(B))_{n-1}}$.

Морфизм $P^\bullet_A(B) \to B$ индуцирует морфизм $L_{B/A} \to \Omega^1_{B/A}$, который, в свою очередь, индуцирует изоморфизм на H_0: $H_0(L_{B/A}) \to \Omega^1_{B/A}$.

Следствие: $\mathrm{Ext}^0_B(L_{B/A}, M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_A(B, M)$.

Если $A \to B$ — морфизм симплициальных колец, то $L_{B/A}$ является бисимплициальным B-модулем (снова B рассматривается как бисимплициальное кольцо, тривиальное по вертикали). В этом случае $\Delta L_{B/A} = \Omega^1_{P/A} \otimes_P B$, где $P = \Delta P_A(B)$, и имеется морфизм $\Delta L_{B/A} \to \Omega^1_{B/A}$. Если для каждого натурального n модуль B_n является свободной коммутативной A_n-алгеброй, то это квази-изоморфизм.

2.1.3. Точная последовательность транзитивности. Пусть $A \to B \to C$ — морфизмы симплициальных колец в T. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

где $P = \Delta P^\bullet_A(B)$ и $Q = \Delta P^\bullet_P(C)$, а вертикальные морфизмы — тождественный id_A и две естественных аугментации. Верхняя строка приводит к точной последовательности кэлеровых дифференциалов

$$0 \to \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q \to \Omega^1_{Q/A} \to \Omega^1_{Q/P} \to 0.$$

(здесь нужно использовать, что Q свободен над P). Домножим ее тензорно на C над Q. Полученная точная последовательность называется *точной последовательностью транзитивности*; ей соответствует выделенный треугольник в производной категории

$$\begin{tikzcd} & \Delta L_{C/B} \arrow[dl] & \\ \Delta L_{B/A} \otimes_B C \arrow[rr] & & \Delta L_{C/A} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Если же A, B, C — обычные кольца в T, то имеется такой же треугольник без применения Δ.

Список литературы

[Bei12] Alexander Beilinson, p-*adic periods and derived de Rham cohomology*, Jour. AMS, **25** (3), 2012, 715–738.

[Bei13] Alexander Beilinson, *On the crystalline period map*, http://arxiv.org/abs/1111.3316, 2013.

[Ill71] Luc Illusie, *Complexe cotangent et Déformations I*, Lecture Notes in Mathematics 239, 1971.

[Ill72] Luc Illusie, *Complexe cotangent et Déformations II*, Lecture Notes in Mathematics 283, 1972.

[Ill13] Luc Illusie, Around the Poincaré lemma, after Beilinson (preliminary notes), 2013.