22.05.2006
Яковлев А.В.
Категория мотивов

$\mathfrak{A}$ – add категория (Mor – аб. группа, есть $\oplus$)
K – ассоц. комм. к. с 1

$M'_K(\mathfrak{A})$: $\mathrm{ob}\, M'_K(\mathfrak{A}) = \mathrm{ob}\,\mathfrak{A}$

~~Mor~~ $\mathrm{Hom}_{M'_K}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A,B)\otimes K$

$M_K(\mathfrak{A})$: $\mathrm{ob}\, M_K(\mathfrak{A}) = \{(A,e) \mid e^2=e,\ e\in \mathrm{End}_{M'_K(\mathfrak{A})} A\}$

$\mathrm{Hom}_{M_K(\mathfrak{A})}((A,e),(B,d)) = d\,\mathrm{Hom}_{M'_K}(A,B)\,e$

<u>категория мотивов</u> над K категории $\mathfrak{A}$.

$K=\mathbb{Z}$: $M_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{A}) =: M(\mathfrak{A})$

$M_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{A}) =: M_p(\mathfrak{A})$

$M_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A}) =: M_0(\mathfrak{A})$

$M_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}) =: M_\infty(\mathfrak{A})$

$M_{\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{A}) =: \widetilde{M}_p(\mathfrak{A})$

$$\begin{tikzcd}
M(\mathfrak{A}) \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "F_p"'] & M_0(\mathfrak{A}) \arrow[d, "\widetilde{G}_p"'] \arrow[dr] & \\
M_p(\mathfrak{A}) \arrow[r, "G_p"'] & \widetilde{M}_p(\mathfrak{A}) \arrow[r] & M_\infty(\mathfrak{A})
\end{tikzcd}$$

— индуцированы вложениями

$\forall$ вложения

$A, B \in M(\mathfrak{A})$

$\boxed{\text{Опр}}$ A, B <u>принадлежат одному роду</u>, если $F_0(A)\cong F_0(B)$ и $F_p(A)\cong F_p(B)$ $\forall$ простых p.

$\boxed{\text{T1}}$ $A = A_1 \oplus A_2$, $\in M(\mathfrak{A})$, $B\sim A$ (принадлежат одному роду)
$\rightsquigarrow \exists\, B_1, B_2 \in M(\mathfrak{A})$: $B = B_1\oplus B_2$, $B_1\sim A_1$, $B_2\sim A_2$

$\boxed{\text{T2}}$ Пусть $X_0\in M_0(\mathfrak{A})$, $X_p\in M_p(\mathfrak{A})$ – такие, что
[redacted] $\forall p$ $G_p(X_p)\cong \widetilde{G}_p(X_0)$
и почти все X_p тривиальны

Если $M_0(\mathfrak{A})$, $M_p(\mathfrak{A})$ — категория Крулля-Шмидта

$X_0 = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$ — Σ неразложимых

$\widetilde{G}_p(X_0) = \widehat{G}_p(Y_0) \oplus \dots \oplus \widehat{G}_p(Y_n)$

$G_p(X_p) = \dots$ разл., полученное из разложения X_p

$\rightsquigarrow \exists A \in M(\mathfrak{A}) : F_0(A) \cong X_0,\ F_p(A) \cong X_p\ \forall p.$

$A \in \mathfrak{A}$ $E = End_{\mathfrak{A}}(A)$ как адд. группа

T — подгруппа кручения в $End_{\mathfrak{A}}(A)$

E/T — аб. группа без кручения конечного ранга

$\forall p$ p-компонента T_p группы T конечна

будем считать, что в T_p нет делимых прямых слагаемых

$(\Rightarrow)\ \forall\ Hom_{\mathfrak{A}}(A, B)$

В этих условиях T_1 и T_2 справедливы,

и при этом $M_0(\mathfrak{A})$, $M_p(\mathfrak{A})$, $\widehat{M}_p(\mathfrak{A})$ — категории Кр-Шмидта

В теории абелевых групп много загадочных вещей

$\mathfrak{A}$ — кат. аб. групп A таких, что $A/T(A)$ — кон. ранга, $T_p(A)$ — конечна

A не обяз. $A/T(A) \oplus T(A)$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \oplus T_p(A) \hookrightarrow \prod T_p(A)$$

$$X \hookrightarrow \prod T_p(A) / \Sigma \text{ — делимая группа без кручения.}$$

$X \cong \mathbb{Q}$ $\quad T^{-1}(X)$

$A \in M(\mathfrak{A})$ — <u>почти неразложим</u>, если для всякого его разложения

$A = B \oplus C$ $\quad F_0(B) = 0$ или $F_0(C) = 0$