Плоские, этальные, гладкие морфизмы

27.09.2012

А. Ананьевский

И.А. Панин

X — алг. многообразие $/k$

на X имеется топология Зариского

пучки в топологии Зариского

Например, если X — аффинное, M — $k[X]$-модуль

$\rightsquigarrow \widetilde{M}$ — пучок на X: $\Gamma(X_f, \widetilde{M}) = M_f$

$\rightsquigarrow$ категория: $Zar(X)$, Zar_X.

объекты = открытые подмножества в X

морфизмы: $Mor(U,V) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } U \not\subset V \\ i, & \text{если } U \overset{i}{\hookrightarrow} V \end{cases}$

$Zar_X^{op} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{A}b$ — предпучок:

Опр. Предпучок абелевых групп в топологии Зариского на X — это контравар. функтор $\mathcal{F}: Zar_X \to \mathcal{A}b$

Опр. Пучок абелевых групп в топологии Зариского на X — это такой предпучок $\mathcal{F}$, что $\forall$ открытого покрытия

$\bigcup U_i = U$ последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

точна

Критерий Предпучок $\mathcal{F}$ на Zar_X — пучок

$\Longleftrightarrow \forall U \subset X \ \forall U_1, U_2: U_1 \cup U_2 = U$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U_1\cap U_2) & \longleftarrow & \mathcal{F}(U_1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(U_2) & \longleftarrow & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

— декартов квадрат

Если $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — два предпучка на Zar_X, то морфизм $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ — это просто естественное преобразование функторов

т.е.
$$\begin{array}{cccc} U & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & G(U) \\ \uparrow & \big\downarrow \text{res} & & \big\downarrow \text{res} \\ V & \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & G(V) \end{array}$$

для пучка $\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$

$\rightsquigarrow$ категория предпучков $PreSh(X_{Zar})$;

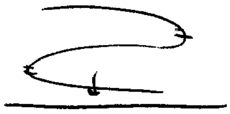
$Sh(X_{Zar})$ — полная подкатегория в $PreSh(X_{Zar})$

Другие топологии:

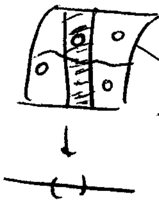
1. Этальная $\rightsquigarrow$ этальные когомологии
2. Плоская $(+\ldots)$ $\rightsquigarrow$ плоские когомологии
3. Нисневича — на гладких X $\rightsquigarrow$ когомологии Нисневича (частный случай: мотивные когомологии)

Неформально:

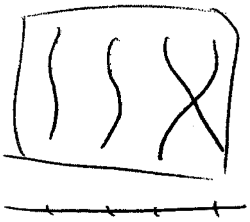
гладкий морфизм $\approx$ (дифференцируемое отображение (+ дифференциал всюду сюръективен)) — этальное,
этальный морфизм $\approx$ неразветвленное накрытие:



но не накрытие



плоский морфизм $\approx$ слои одной размерности:



этальный
$\Downarrow$
гладкий
$\Downarrow$
плоский

Книга: Altman, Kleiman, Introduction to Grothendieck duality theory

Пререквизиты: комм. алгебра (Атья – Макдональд)
определения про схемы

1. Строго плоские модули

Опр. $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ — строгий функтор, если
$\forall N, N' \in \mathcal{C}$ $\quad T : \mathrm{Hom}(N, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}(TN, TN')$ — инъективно

Если $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ — аддитивные категории, T аддитивен, то
T — строгий $\Leftrightarrow$ $Tu = 0$ только если $u = 0$

Предложение $T : \mathcal{C} \xrightarrow{\text{абелевы}} \mathcal{C}'$ — аддитивный. Равносильны:

1. T — точный и строгий
2. T — точный и $TN = 0 \Rightarrow N = 0$
3. $N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ — точна $\Leftrightarrow$ $TN' \longrightarrow TN \longrightarrow TN''$ — точна

Д-во: (1) $\Rightarrow$ (2) $\quad TN = 0 \Rightarrow T(\mathrm{id}_N) = 0 \longrightarrow \mathrm{id}_N = 0 \longrightarrow N = 0$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\underbrace{}_{\text{"}\Rightarrow\text{" уже есть!}}$ Пусть $TN' \xrightarrow{Tu} TN \xrightarrow{Tv} TN''$ — точна.

$T(ku) = Tk \cdot Tu = 0 \rightsquigarrow ku = 0$

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & N \arrow[r, "v"] & N'' \\ \operatorname{Im} u \arrow[r, hook, two heads] & \ker v \arrow[u] \arrow[r, two heads] & M \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} TN' \arrow[rr, "Tu"] \arrow[d] & & TN \arrow[r, "Tv"] & TN'' \\ T(\operatorname{Im} u) \arrow[r, "\sim"] & T(\ker v) \arrow[ur] \arrow[r, two heads] & TM \end{tikzcd}$$

т.к. $TN' \to TN \to TN''$ точна

$\Rightarrow TM = 0 \underset{\text{по }(2)}{\Longrightarrow} M = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} u = \ker v$

(3) $\Rightarrow$ (1). Точность есть;

Пусть $u : N \to N'$: $Tu = 0$

$$N \xrightarrow{u} N' \xrightarrow{v} \operatorname{Coker}(u)$$

$$\rightsquigarrow TN \xrightarrow[\overset{\|}{0}]{Tu} TN' \xrightarrow[\sim]{} T(\operatorname{Coker} u)$$

$\Rightarrow V$ - изоморфизм $\Rightarrow u = 0$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad \begin{tikzcd} N \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & N' \\ & \operatorname{Im} u \arrow[ur] & \end{tikzcd}$

$T(\operatorname{Im} u) = 0 \rightsquigarrow \operatorname{Im} u = 0 \rightsquigarrow u = 0$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ - абелевы, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ - аддитивен. Пусть есть $\{N_\alpha \mid N_\alpha \in \mathcal{C}, N_\alpha \neq 0\}$ т.ч.

$\forall N \in \mathcal{C} \quad \exists N'$ и $N_\beta \in \{N_\alpha\}$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & N \\ N_\beta \arrow[d] & \\ 0 & \end{tikzcd}$$

Тогда T - точный и строгий $\Leftrightarrow T$ - точный и $TN_\alpha \neq 0 \ \forall \alpha$

$\boxed{\text{Пример}}$ ① $\mathcal{C} = R\text{-Mod}$, $\mathcal{C}' = R[x]\text{-Mod}$ $T = R[x] \otimes_R -$

② $\underset{\text{локальное кольцо}}{\mathcal{C} = R\text{-Mod}}$, $\mathcal{C}' = \hat{R}\text{-Mod}$, $T : T(M) = \hat{M}$.

③ $\mathcal{C} = \underset{\text{поле}}{k}\text{-Mod}$, $\mathcal{C}' = k'\text{-Mod}$, $T = k' \otimes_k -$

Д-во следствия:

„$\Rightarrow$" очевидно из Предложения

„$\Leftarrow$" тоже

$\boxed{\text{Опр.}}$ A — кольцо, $M \in A\text{-Mod}$.

M — <u>строго плоский модуль</u>, если функтор $M \otimes -$ точный и строгий

— <u>плоский модуль</u>, если он точный

$\boxed{\text{Предл.}}$ A — кольцо, $M \in A\text{-Mod}$. Равносильны:

1. M — строго плоский
2. M плоский и $(M \otimes N = 0 \Rightarrow N = 0)$
3. M плоский и $\forall \underset{\text{макс. идеал}}{\mathfrak{m}} \trianglelefteq A \quad \underbrace{M \otimes_A A/\mathfrak{m}}_{= M/\mathfrak{m}M} \neq 0$
4. $N' \to N \to N''$ — точная $\Leftrightarrow M \otimes N' \to M \otimes N \to M \otimes N''$ — точна

Д-во: $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (4)$ — уже знаем

Пусть $N \neq 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A/I \arrow[r] \arrow[d] & N \\ & A/\mathfrak{m} \arrow[d] & \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \{A/\mathfrak{m}\}$ удовл. следствию

$\rightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$

(геометрически $M \otimes_A A/\mathfrak{m}$ — слой над $\mathfrak{m}$)

Для дедекиндова кольца M-плоский $\Leftrightarrow$ в M нет кручения

Если M — кон. порожд., A — нетерово, то плоскость $\Leftrightarrow$ локальная свободность

$\boxed{\text{Предложение}}$ $A \longrightarrow B$ — гомоморфизм колец,

$M, N \in A\text{-Mod}, \quad P \in B\text{-Mod}$

1. M, N — плоские (строго плоские) $\Rightarrow M \otimes_A N$ — плоский (строго плоский)
2. M — A-плоский (строго плоский) $\Rightarrow M \otimes_A B$ — B-плоский (строго плоский)
3. B — A-плоский (строго), P — B-плоский (строго) $\Rightarrow P$ — A-плоский (строго)
4. B — строго A-плоский, $M \otimes_A B$ — B-плоский (строго) $\Rightarrow M$ — A-плоский (строго)

Д-во: (1) $(M \otimes N) \otimes - \cong M \otimes (N \otimes -)$

(4) $(M \otimes_A -) \otimes_A B \cong (M \otimes_A B) \otimes_B (- \otimes_A B)$

Предложение A, B — локальные; $A \to B$ — локальный гомоморфизм колец

$$M \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{кон. порожд.}}}{B\text{-mod}} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} M \text{ — строго плоский над } A \\ \Updownarrow \\ M \text{ — плоский над } A \end{array} \right)$$

Док-во $\mathfrak{m}$ — макс. идеал A

$\mathfrak{n}$ — макс. идеал B

$$M \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0 \rightsquigarrow M = \mathfrak{m} M \overset{\text{локальный}}{\rightsquigarrow} M = \mathfrak{n} M \xrightarrow{\text{л. Накаямы}} M = 0$$

Следствие Возьмем $A \to B$ — локальный гомоморфизм

B — A-плоский $\Rightarrow B$ — строго плоский над A.

Лемма $M \in A\text{-Mod}$; M — плоский $\Leftrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(M, A/I) = 0 \ \forall I \trianglelefteq A$

Опр. $M, N \in A\text{-Mod}$

$P_\bullet \ \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow N$ — проективная резольвента

$$\rightsquigarrow$$

$P_\bullet \otimes M$: $\quad \cdots \to P_2 \otimes M \to P_1 \otimes M \to P_0 \otimes M \to 0$

$$\operatorname{Tor}_i^A(M, N) = H_i(P_\bullet \otimes M)$$

Д-во: „$\Rightarrow$" — очевидно

„$\Leftarrow$": Рассмотрим $N \in A\text{-mod}$; индукция по кол-ву образующих

Докажем, что $\operatorname{Tor}_1(M, N) = 0 \ \forall N$ База: $N \cong A/I$ — дано

Переход: $\exists N'$ т.ч. кол-во образующих N' меньше

и $N/N' \cong A/I$. Тогда

$$N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow A/I$$

$$\Rightarrow \cdots \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Tor}_1(M, N')}} \to \operatorname{Tor}_1(M, N) \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Tor}_1(M, A/I)}}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Tor}_1(M, N) = 0$$

$\forall$ модуль — $\varinjlim$ конечно порожденных, Tor коммутирует с ним

$$\to \operatorname{Tor}_1(M, \varinjlim N_i) = \varinjlim \operatorname{Tor}(M, N_i)$$

$$\to \operatorname{Tor}_1(M, N) = 0 \quad \forall N$$

Теперь напишем для $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ длинную точную посл-ть:

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Tor}_1(M, N'')}} \to N' \otimes M \to N \otimes M \to N'' \otimes M \to 0$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $M \in A\text{-Mod}$, $I \trianglelefteq A$

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0 \iff I \otimes_A M \longrightarrow IM \text{ — биекция}$$
$$a \otimes m \longmapsto am$$

Док-во "⇒": $I \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/I$ ⇝

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) \longrightarrow I \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M \longrightarrow A/I \otimes_A M$$

$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$, $A \otimes_A M \cong M$, $A/I \otimes_A M \cong M/IM$

$0 \rightsquigarrow I \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M$ — инъекция

"⇐": $\mathrm{Tor}_1(M, A) = 0$ очевидно

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\varphi : A \longrightarrow B$ — гомоморфизм колец. Равносильны:

1. B — строго плоский A-модуль
2. φ инъективно и $B/\varphi(A)$ — A-плоский
3. B — A-плоский и $\forall M \in A\text{-Mod}$ $\mathrm{id} \otimes \varphi : \underset{\cong M}{M \otimes_A A} \longrightarrow M \otimes_A B$ инъективно
4. $\forall I \trianglelefteq A$ $I \otimes B \longrightarrow IB$ — биекция и $\varphi^{-1}(IB) = I$

$(\iff IB \cap A = I)$

Д-во: (1) ⇒ (3). Рассмотрим

$$0 \longrightarrow \underset{\ker u}{N} \longrightarrow M \xrightarrow{u = \mathrm{id} \otimes \varphi} M \otimes B \text{ — точная}$$
$$\downarrow$$
$$0 \longrightarrow N \otimes B \longrightarrow M \otimes B \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}} M \otimes B \otimes B \text{ — точная}$$
$$m \otimes b_1 b_2 \longleftarrow m \otimes b_1 \otimes b_2$$

⇝ $u \otimes \mathrm{id}$ инъективно ⇝ $N \otimes B = 0$ ⇝ $N = 0$

(2) ⇔ (3):

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/\varphi(A) \longrightarrow 0$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Tor}_1(M, B) \longrightarrow \underset{0}{\mathrm{Tor}_1(M, B/\varphi(A))} \longrightarrow M \longrightarrow M \otimes_A B$$

⇝ инъективно

и взять $M := A$ для (3) ⇒ φ — инъект.; далее легко

(2) & (3) ⇒ (4): $I \otimes B \longrightarrow IB$ — биекция (см. Лемму)

$$0 \longrightarrow A/I \rightarrowtail B/IB \overset{\text{Лем}}{=} A/I \otimes B \quad \rightsquigarrow \varphi^{-1}(IB) = I$$

(4) ⇒ (1) $I \otimes B \longrightarrow IB$ — биекция ⇒ $\mathrm{Tor}_1(B, A/I) = 0$ ⟶ B — плоский

Строгость: пусть $\mathfrak{m} \triangleleft A$ — макс. идеал ⇝ $B \otimes_A A/\mathfrak{m} = B/\mathfrak{m}B \supset A/\mathfrak{m}$

$\mathfrak{m}B \cap A = \mathfrak{m}$ ⇝ если $B = \mathfrak{m}B$, то $A = \mathfrak{m}$

Примеры

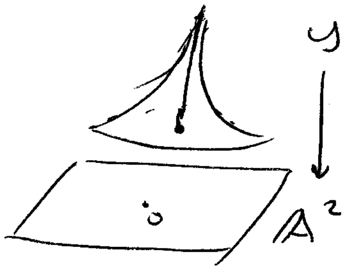
① A – область

X – неприв.

$Z \hookrightarrow X$

$A \twoheadrightarrow A/I = B$ – не плоский

②



– не плоский морфизм