04.10.2012

Плоские морфизмы

А. Ананьевский

Опр. $f: X \longrightarrow Y$ — морфизм схем, $\mathcal{F} \in QCoh(X)$.

- $\mathcal{F}$ <u>плоский над Y в точке $x \in X$</u>, если $\mathcal{F}_x$ плоский над $\mathcal{O}_{f(x)}$
- $\mathcal{F}$ <u>плоский над $y \in Y$</u>, если плоский над Y во всех $x \in f^{-1}(y)$
- $\mathcal{F}$ <u>плоский над Y</u>, если плоский над всеми $y \in Y$
- $\mathcal{F}$ <u>строго плоский над Y</u>, если он плоский над Y и $\mathcal{F} \otimes k(y) \neq 0 \ \forall y \in Y$

Предложение $f: \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ — морфизм схем, $\tilde{M} \in QCoh(\operatorname{Spec} B)$. Тогда

$\tilde{M}$ плоский (строго плоский) над $\operatorname{Spec} A \Longleftrightarrow M$ плоский (строго плоский) над A

<u>Док-во:</u> $\varphi: A \longrightarrow B$ — соотв. гомоморфизм колец.

Слева написано, что

$$M \otimes_B B_p \quad A_{\varphi^{-1}(p)}\text{-плоский } \forall \text{ простого } p \trianglelefteq B$$

$$\overset{?}{\Longleftrightarrow} M \text{ — плоский } A\text{-модуль}$$

Заметим:

$$M \otimes_B B_p \otimes_{A_{\varphi^{-1}(p)}} - \cong M \otimes_B B_p \otimes_A - \cong B_p \otimes_B (M \otimes_A -)$$

Почему?

Пример: $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \overset{?}{=} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

$$a \otimes b\tfrac{p}{q} = pa \otimes b \cdot \tfrac{1}{q} = p \cdot \tfrac{q}{q} a \otimes b \tfrac{1}{q} = \tfrac{p}{q} a \otimes b \cdot \tfrac{q}{q} = \tfrac{p}{q} a \otimes b$$

„$\Leftarrow$" — очевидно — точность функторов

„$\Rightarrow$": $M \otimes_A -$ точный? Он точен справа, проверим точность слева:

$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} N'$ точна. Пусть

$\cancel{0} \longrightarrow M \otimes_A N \xrightarrow{id \otimes i} M \otimes_A N'$ — не вложение

$\rightsquigarrow \exists x \in M \otimes N,\ x \neq 0 : (id \otimes i)(x) = 0$

$Ann_B(x) = ?$ Пусть $Ann_B(x) \subseteq \mathfrak{m} \trianglelefteq B$ ← макс. идеал

$$\begin{array}{ccc}
x \in M \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N' \\
\downarrow & & \downarrow \\
x \neq 0 \in B_{\mathfrak{m}} \otimes_B M \otimes_A N & \longrightarrow & B_{\mathfrak{m}} \otimes_B M \otimes_A N' \\
\cong & & \cong \\
\underbrace{B_{\mathfrak{m}} \otimes_B M}_{\text{плоский}} \otimes_{A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{m})}} N & \underset{\text{инъекция}}{\longrightarrow} & B_{\mathfrak{m}} \otimes_B M \otimes_{A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{m})}} N'
\end{array}$$

плоский $\Rightarrow$ инъекция $\Rightarrow$ противоречие. $\square$

Со строгой плоскостью все просто.

$\tilde{M} \otimes k(y) \neq 0 \ \forall y$
$\Updownarrow$
$M \otimes A/\mathfrak{m} \neq 0 \ \forall \mathfrak{m} \trianglelefteq A$

Предложение $f : X \longrightarrow Y$ — морфизм схем, $\mathcal{F} \in QCoh(X)$

$\mathcal{F}$ — конечного типа (т.е. локально $\mathcal{O}_X^n \twoheadrightarrow \mathcal{F}$). Тогда

$\mathcal{F}$ — строго плоский над $Y \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ плоский над Y и $f(Supp(\mathcal{F})) = Y$

__Д-во__ $\mathcal{F} \otimes k(y) \neq 0 \ \forall y \in Y \overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$ и $\mathcal{F}_x \neq 0$

$$\Updownarrow$$

$$\forall y \in Y \ (f_* \mathcal{F})_y \neq 0$$

„$\Rightarrow$" очевидно: если все ростки нулевые, то и все слои нулевые

„$\Leftarrow$" Пусть $y \in Y$ $\exists x \in X : f(x) = y$ и $\mathcal{F}_x \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_x \\ \cup| \\ \mathfrak{m}_y \mathcal{F}_x \end{array} \Rightarrow \mathcal{F} \otimes k(y) \neq 0$$

лемма Накаямы

□

Опр. $f : X \longrightarrow Y$ — морфизм схем.

- f __квазиплоский__, если $\exists \mathcal{F} \in QCoh(X)$ конечного типа, плоский над Y и $Supp(\mathcal{F}) = X$.
- f __квази-строго плоский__, если f квази-плоский и $f(X) = Y$
- f __плоский__, если $\mathcal{O}_X$ — плоский над Y
- f __строго плоский__, если f плоский и $f(X) = Y$

Следствие $f : X \longrightarrow Y$ квази-плоский, $x \in X$, $y \in Y$, $y = f(x)$

Тогда $\forall y' \in Spec(\mathcal{O}_y)$ $\exists x' \in Spec(\mathcal{O}_x)$ т.ч. $f(x') = y'$

__Д-во:__ можно считать, что $X = Spec(\mathcal{O}_x)$, $Y = Spec(\mathcal{O}_y)$,

возьмем $\mathcal{F} \in QCoh(X)$ из определения квази-плоского

$\Rightarrow \mathcal{F}$ — строго плоский над Y (это было в прошлый раз)

$\Rightarrow f(Supp(\mathcal{F})) = Y$

□

Предложение ① Открытое вложение — плоский морфизм

② Композиция плоских (строго) — плоский (строго)

③ Замена базы плоского (квази, квази-строго, строго) тоже плоский (—//—)

④ Произведение плоских (строго) — плоский (строго)

$X \times X' \longrightarrow Y \times Y'$ — следует из (2) и (3)

__Док-во__ Легко □

$\boxed{\text{Предложение}}$ A — нетерово локальное кольцо, $M \in A\text{-mod}$
$\Rightarrow$ M — плоский A-модуль $\Leftrightarrow$ M — свободный

$\underline{\text{Д-во}}$ „$\Leftarrow$" очевидно; „$\Rightarrow$" $x_1, \dots, x_n \in M$ т.ч. $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ — базис $M \otimes_A A/\mathfrak{m}$

$$\rightsquigarrow A^n \xrightarrow[(x_1,\dots,x_n)]{} M \longrightarrow N \longrightarrow 0 \qquad k = A/\mathfrak{m}$$

$$\downarrow \otimes A/\mathfrak{m}$$

$$k^n \xrightarrow{\sim} M \otimes k \longrightarrow N \otimes k \longrightarrow 0 \Rightarrow N \otimes k = 0 \overset{\text{л. Накаямы}}{\Longrightarrow} N = 0$$

$$0 \longrightarrow N' \hookrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{Tor}_1^A(M,k) \longrightarrow N' \otimes k \longrightarrow k^n \xrightarrow{\sim} M \otimes k \longrightarrow 0$$

$\operatorname{Tor}_1^A(M,k) = 0$ ← поскольку M плоский; $N' \otimes k = 0 \rightsquigarrow N' = 0$ ← л. Накаямы $\square$

$\boxed{\text{Предложение}}$ X, Y — локально нетеровы схемы, $f: X \longrightarrow Y$ — конечный морфизм (т.е. $Y = \bigcup \operatorname{Spec} A_i$ т.ч. $f^{-1}(\operatorname{Spec} A_i) = \operatorname{Spec} B_i$ и B_i — конечный модуль над A_i $\forall i$)
$\mathcal{F} \in \operatorname{Coh}(X)$, $\mathcal{F}$ плоский над $y \in Y$.
Тогда $(f_* \mathcal{F})_y$ — свободный

$\boxed{\text{Д-во}}$ $(f_* \mathcal{F})_y$ — плоский, конечно порожд. над $\mathcal{O}_y$, $\mathcal{O}_y$ — локальное нетерово $\Rightarrow$ $\square$

$\boxed{\text{Предложение}}$ $A \longrightarrow B$ — локальный гомоморфизм локальных нетеровых колец
$\Rightarrow \dim B \leqslant \dim(A) + \dim(B \otimes_A A/\mathfrak{m}_A)$

$\underline{\text{Д-во}}$ $d = \dim(A) \rightsquigarrow (x_1, \dots, x_d) = I \trianglelefteq A$ такой, что A/I артиново
$\rightsquigarrow \mathfrak{m}_A/I \trianglelefteq A/I$ — нильпотентный идеал
$\rightarrow \mathfrak{m}_A B/IB$ — нильпотентный
$\rightarrow \dim(\underline{B \otimes_A A/\mathfrak{m}_A}) = \dim(B/IB)$, где $B \otimes_A A/\mathfrak{m}_A = B/\mathfrak{m}_A B$

и $\dim B \geqslant \dim(B/IB) - d$ $\square$

$\boxed{\text{Предложение}}$ $\varphi: A \longrightarrow B$ — локальный гомоморфизм локальных нетеровых колец
$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_A$, $k = A/\mathfrak{m}_A$. Пусть верно одно из следующих условий

① $\exists M \in B\text{-mod}$: M — плоский над A

② $\forall$ простого идеала $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ и всех минимальных простых $\mathfrak{q}$: $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}B$ выполнено $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \neq \mathfrak{m}$

Тогда $\dim(B) = \dim(A) + \dim(B \otimes_A A/\mathfrak{m})$

Д-во (1) $\Rightarrow$ (2) : рассмотрим $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$,

$\mathfrak{q}$ — мин. простой $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}B$. Пусть $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$

$\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$
$B_{\mathfrak{q}}$ — локальный гомоморфизм

$\rightsquigarrow M_{\mathfrak{q}}$ — плоский над $A_{\mathfrak{m}} = A$ $\rightsquigarrow$ строго плоский над A

$\Rightarrow \exists\, \mathfrak{q}' \trianglelefteq B_{\mathfrak{q}} : \varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}$

$\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} \supsetneq \mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}} \supset \mathfrak{p}B$ $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{q}$ не минимальный.