11.10.2012

Напоминание: мы доказываем (после редукции) А. Ананьевский

Предложение' $A \longrightarrow B$ — локальный гомоморфизм локальных нётеровых колец, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_A$, $k = A/\mathfrak{m}_A$. Пусть $\forall$ простого идеала $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ и всех минимальных простых $\mathfrak{q}$ таких, что $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}B$, имеет место $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \neq \mathfrak{m}$. Тогда $\dim(B) = \dim(A) + \dim(B \otimes_A A/\mathfrak{m})$

Док-во Индукция по $\dim A$

1) $\dim A = 0 \rightsquigarrow \mathfrak{m} = Nil(A) \rightsquigarrow \mathfrak{m}B \subseteq Nil(B)$
$\rightsquigarrow \dim(B \otimes_A A/\mathfrak{m}) = \dim(B/\mathfrak{m}B) = \dim(B)$

2) $\dim A > 0$. Рассмотрим $\{\mathfrak{q}_i\}$ — мин. простые в B.
конечное множество (B нётерово)

$\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i) \trianglelefteq A$. Если $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}$, то $\exists \mathfrak{p} \trianglelefteq A$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$,
$\mathfrak{q}_i \supseteq \mathfrak{p}B$ — минимальный, содержащий $\mathfrak{p}B$, и
$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}$?! — противоречие

$\rightsquigarrow \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{m}$

Пусть $\{\mathfrak{p}_j'\}$ — все минимальные простые в A
конечное мн-во

$\rightsquigarrow \exists x \in \mathfrak{m}$, $x \notin \mathfrak{p}_i$, $x \notin \mathfrak{p}_j'$

Пусть $A' = A/_{xA}$, $B' = B/_{xB}$

Тогда $\dim A' = \dim A - 1$
$\dim B' = \dim B - 1$
и $B' \otimes_{A'} A'/\mathfrak{m} = B \otimes_A A/\mathfrak{m}$

Условие теоремы ~~~~ выполнено для A', B'
$\rightsquigarrow$ индукция.

Напоминание X — схема, $Y \subseteq X$ — замкнутая подсхема
$\rightsquigarrow \operatorname{codim}(Y, X) := \inf_{y \in Y} \dim(\mathcal{O}_{X,y})$

Предложение X, Y — локально нётеровы схемы, $f: X \longrightarrow Y$ — сюръективно
$Y' \subseteq Y$ — замкнутая неприводимая подсхема, X' — неприводимая компонента $f^{-1}(Y')$. Тогда

1) если $f|_{X'}: X' \longrightarrow Y'$ сюръективно на общих точках, то

$\operatorname{codim}(X', X) \leq \operatorname{codim}(Y', Y)$

② если f квазиплоский, то $f|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$ — сюръективен на общих точках, и $\operatorname{codim}(X', X) = \operatorname{codim}(f^{-1}(Y'), X) = \operatorname{codim}(Y', Y)$

<u>Док-во</u> $\quad z$ — общая точка Y'

w — общая точка X'

$A = \mathcal{O}_{Y,z}$, $B = \mathcal{O}_{X,w}$ $\quad \varphi: A \longrightarrow B$ — гомоморфизм локальных нётеровых колец

(1) $\operatorname{codim}(X', X) \overset{?}{\leq} \operatorname{codim}(Y', Y)$

$\dim B \overset{?}{\leq} \dim A$

Знаем: $\dim B \leq \dim A + \dim (B \otimes_A A/m_A)$, $\quad \dim (B \otimes_A A/m_A) \overset{?}{=} 0$

$\dim(B/m_A B) \overset{?}{=} 0$

$\Uparrow$

$\operatorname{rad}(m_A B) = m_B$

(2) f — квазиплоский $\Rightarrow f$ сюръективен на общих точках (уже было)

$\underline{\dim B = \dim A} + \dim (B \otimes_A A/m_A)$, $\quad \dim (B \otimes_A A/m_A) = 0$

$\square$

<u>Локальный критерий плоскости</u>

$\boxed{\text{Предложение}}$ $A \longrightarrow B$ — локальный гомоморфизм нётеровых колец

$I \triangleleft A$, $I' \triangleleft B$, $IB \subset I' \subset \operatorname{rad}(B)$, M — конечный B-модуль. Тогда

Равносильны:

① M — плоский A-модуль

② $\hat{M}$ — плоский $\hat{A}$-модуль

③ $\hat{M}$ — плоский $\hat{A}$-модуль

$$\hat{M} = \varprojlim M/(I')^n M$$

<u>Док-во</u> $\hat{M} = M \otimes_B \hat{B}$, ~~$A \to \hat{A}$ строго плоское расширение~~

$B \longrightarrow \hat{B}$ — строго плоское

$$\hat{M} \otimes_A - = \hat{B} \otimes_B M \otimes_A -$$

$\Downarrow$

точность равносильна

Поэтому $(1) \Leftrightarrow (2)$

$A \qquad A/I^s \qquad M/MI^s$

если $\forall t<n$ верно соотв. условие (с заменой $A \rightsquigarrow A/I^t$, $M \rightsquigarrow M/MI^t$, $I \rightsquigarrow I/I^t$), пишем (4_n) и (5_n)

Тогда

$(\forall n (5_n)) \Leftrightarrow (5)$

$(\forall n (4_n)) \Leftrightarrow (4)$

$$\begin{tikzcd}
 & I^{s+1} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & I^s \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & \underset{M/IM}{gr^0_I(M)} \otimes_{A/I} \underset{I^s/I^{s+1}}{gr^s_I(A)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, hook] & I^{s+1}M \arrow[r, hook] & I^sM \arrow[r, two heads] & gr^s_I(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$(3') \Rightarrow (3)$ для $I := I^s \Rightarrow (2')$ для $I := I^s \Rightarrow$ изоморфизм

Обратно: индукция $s+1 \to s$

$(5) \rightsquigarrow$ слева и справа — изоморфизм $\rightsquigarrow$ в центре тоже

При больших s и то и другое $=0$

$\rightsquigarrow$ для таких колец $\forall n(5_n) \Rightarrow (2')$

$(5_n) \Rightarrow (2'_n) \Rightarrow (4_n) \quad \rightsquigarrow (5) \Rightarrow (4)$

Теперь $(4_n) \Rightarrow (1_n)$ — очевидно $\quad \rightsquigarrow (4) \Rightarrow (5)$

$\quad \| $

(5_n)

$\boxed{\text{Теорема}}$ A — кольцо, $I \trianglelefteq A$, M — A-модуль

(1) M — плоский A-модуль

(2) $M \otimes_A A/I$ — плоский A/I-модуль и $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$

(2') — // — // — // — и $I \otimes_A M \longrightarrow IM$ — изоморфизм

(3) $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ $\forall N : IN = 0$

(3') $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ $\forall N : I^s N = 0$ (s зависит от N)

(4) $M \otimes_A (A/I^s)$ — плоский A/I^s-модуль $\forall s$

(5) $M \otimes_A (A/I)$ — плоский A/I-модуль и

$$gr_I^0(M) \otimes_{A/I} gr_I^*(A) \longrightarrow gr_I^*(M) \text{ — изоморфизм}$$

$$(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (2') \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (3') \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$$

Док-во: $(2) \Leftrightarrow (2')$ — очевидно

$(3') \Rightarrow (3)$ — очевидно

$(3) \Rightarrow (3')$: $\mathrm{Tor}_1^A(M, IN) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N/IN)$

$(1) \Rightarrow (2)$: $\forall N$ — A/I-модуля

$$M \otimes N = \underbrace{M \otimes_A A/I}_{\text{плоский}} \otimes_{A/I} N$$ — забывающий функтор — строго плоский

$\boxed{\text{Лемма}}$ $A \longrightarrow B$ — гомоморфизм колец, M — A-модуль. Тогда равносильны:

(1) $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ $\forall$ B-модуля N

(2) $M \otimes_A B$ — плоский B-модуль, и $\mathrm{Tor}_1^A(M, B) = 0$

Док-во: $(2) \Rightarrow (1)$:

$$M \otimes_A -_B = M \otimes_A B \otimes_B -_B$$

$$- \otimes_A N = \underbrace{(- \otimes_B N)}_{S} \circ \underbrace{(- \otimes_A B)}_{T}$$

$$L_p S(L_q T(M)) \Rightarrow L_{p+q}(S \circ T)(M)$$

$$N \otimes_B \mathrm{Tor}_1^A(M, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^B(M \otimes B, N) \longrightarrow 0$$

$(1) \Rightarrow (2)$ — легко $\square$

Значит, $(2) \Leftrightarrow (3)$ (по лемме) и $(3') \Rightarrow (4)$ (по лемме)