$\boxed{18.10.2012}$

А. Дружинин

1 M — плоский над A

2 $M\otimes A/I$ — плоский над A/I и $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I)=0$

2′ —— // —— // — и $I\otimes M \xrightarrow{\sim} IM$

3 $\mathrm{Tor}_1^A(M,N)=0$ $\forall N$ т.ч. $IN=0$

3′ $\mathrm{Tor}_1^A(M,N)=0$ $\forall N$ т.ч. I^sN для некоторого $s=s(N)$

4 $M\otimes(A/I^s)$ — плоский над A/I^s $\forall s$

5 $M\otimes(A/I)$ — плоский над A/I и $gr_I^0(M)\otimes_{A/I} gr_I^*(A) \xrightarrow{\sim} gr_I^*(M)$

т.е.: $M/IM \otimes_{A/I} I^s/I^{s+1} \longrightarrow MI^s/MI^{s+1}$

Оказывается, при каком-то условии все они равносильны:

если M — конечно порождённый B-модуль, A, B — нётеровы кольца, $IB\subset \mathrm{rad}\,B$.

Докажем, что при этом условии (4) $\Rightarrow$ (1)

$N' \hookrightarrow N \xrightarrow{?} M\otimes N' \hookrightarrow M\otimes N$ (как B-модули)

$\Updownarrow$

$\widehat{M\otimes N'} \hookrightarrow \widehat{M\otimes N}$ (как $\hat{B}$-модули)

$\Downarrow$

$N'/(N'\cap I^rN) \hookrightarrow N/I^rN$

$\Leftarrow$ $A/I^s\otimes M\otimes N' \hookrightarrow A/I^s\otimes M\otimes N$

а нам дано то же самое, но с другой фильтрацией

$M\otimes_A N'/(N'\cap I^rN) \longrightarrow M\otimes_A N/I^rN$

(можно поставить A/I^r заменив M на $M\otimes A/I^r$:

$(M\otimes A/I^r)\otimes_{A/I^r}\left(N'/(N'\cap I^rN)\right) \hookrightarrow (M\otimes A/I^r)\otimes_{A/I^r}\left(N/I^rN\right)$

$\rightarrow$ начиная с некоторого момента

$I^{r-k}(N'\cap I^kN) = N'\cap I^rN$ для всех $r > k$

(т. Артина – Риса)

$\rightarrow M\otimes N'/M\otimes(N'\cap \cancel{I}N)I^n$

$I^{n-k}\otimes M\otimes(N'\cap NI^k)$

$M' := \text{образ}\,(M\otimes(N'\cap NI^k))$ в $M\otimes N'$

$$\to M\otimes N' / I^{r-k}M' \hookrightarrow M\otimes N / I^{r}(M\otimes N)$$

такие фильтрации задают одинаковую топологию (пополнения одинаковы):

$$\varprojlim_{r} M\otimes N / I^{r-k}M' = \varprojlim_{j} M\otimes N' / I^{j}(M\otimes N')$$

— достаточно проверить, что $M' \overset{?}{\supset} I^{?}(M\otimes N')$

например, $? = k$ $\square$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $A \longrightarrow B$ — гомоморфизм нётеровых колец

M — B-модуль, $I \trianglelefteq A$: $IB \subset I' \subset \operatorname{rad} B$

$\hat{M} = \varprojlim_{k} M / I'^{k} M$. Тогда равносильны:

1. M — плоский над A
2. $\hat{M}$ — плоский над A
3. $\hat{M}$ — плоский над $\hat{A}$

<u>Док-во</u>: в прошлый раз мы обсудили, что $(1) \Leftrightarrow (2)$

(— из того, что $B \longrightarrow \hat{B}$ — строго плоский (для этого как раз и нужно $I' \subset \operatorname{rad} B$))

$\hat{M}$ — $\hat{B}$-модуль (конечно порождённый)

$I\hat{B} \subseteq \operatorname{rad} \hat{B} \leadsto$ можно применить теорему

Проверим (4):

$$\hat{M} / I^{s}\hat{M} \overset{?}{\cong} \hat{M} / \hat{I}^{s}\hat{M}$$

$$\hat{M} \otimes_{A} A/I^{s} \cong \hat{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}/\hat{I}^{s}$$, а это верно $\square$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $R \longrightarrow A$ плоский, $A \longrightarrow B$ — локальные гомоморфизмы локальных нётеровых колец, M — конечно порождённый B-модуль

Тогда равносильны: $k = R/\mathfrak{m}_R$, $I = \mathfrak{m}_R \cdot A$

1. M — плоский над A
2. M — плоский над R и $M \otimes_R k$ — плоский над $A \otimes_R k$

Док-во: (1) $\Rightarrow$ (2) — очевидно (замена базы)

$$M/_{IM} \otimes_{A/I} I^s/_{I^{s+1}} \overset{?}{\cong} I^s M/_{I^{s+1}M}$$

лок. критерий плоскости (5)

$$A/_I \otimes_{R/m} m^s/_{m^{s+1}} \cong m_R^s A/_{m_R^{s+1}A}$$

$$M/_{mM} \otimes m^s/_{m^{s+1}} \cong m^s M/_{m^{s+1}M}$$

и все получилось:

$$M/_{IM} \otimes_k m^s/_{m^{s+1}} \cong I^s M/_{I^{s+1}M}$$

$\square$

Следствие

$A \longrightarrow B$ — квазиконечный, локальный

локальные регулярные $\qquad \dim B = \dim A$

$\Rightarrow B$ — плоский над A

$$A_p/_p \otimes B = B_p/_{pB} \quad \text{ок.}$$

Утв. $A \longrightarrow B$ — локальный гомоморфизм

M — к/пор. B-модуль, $\quad m_A$ — макс. идеал A, $k = A/_{m_A}$

Пусть
1. A — регулярное локальное
2. M — B-модуль Коэна–Маколея
3. $\dim_B(M) = \dim(A) + \dim_{B \otimes_A k}(M \otimes_A k)$

Тогда M — плоский A-модуль

Док-во: достаточно проверить, что $M \otimes k$ — плоский над k и $\mathrm{Tor}^A(M,k) = 0$.

Ведем индукцию:

$$\mathrm{Tor}^A(M, A/_{(x_0,\dots,x_i)}) = 0$$

рег. последовательность

$$M/_{(x_0,\dots,x_{i-1})M} \xrightarrow{\cdot x_i} M/_{(x_0,\dots x_{i-1})M}$$ — инъективно

$$M \xrightarrow{x_0} M$$ — инъективно

$$M_i = \mathrm{coker}(M_{i-1} \xrightarrow{x_i} M_{i-1})$$

Коэн-Маколей: $\mathrm{depth}(M) = \dim(M)$

(КМ) макс. длина рег. последовательности

$\mathrm{depth} \leq \min(\dim \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M) \leq \dim(M)$ — всегда

→ при условии КМ все компоненты имеют одинаковую размерность и нету вложенных

- $x \in \mathfrak{m}$, $\dim(M/_{xM}) = \dim(M) - 1$
  $\Rightarrow x$ — регулярный для M (M-регулярный)
  и для $M/_{xM}$ выполняется КМ

- $(x_0, \dots, x_{n-1})$ — M-регулярна
  $M_i := M_{i-1}/_{x_{i-1}M_{i-1}}$
  $A_i := A_{i-1}/_{x_{i-1}A_{i-1}}$

$\mathrm{Tor}(M, A_i) \overset{?}{=} 0$

$$A_i \xrightarrow{\cdot x_i} A_i \longrightarrow A_{i+1}$$

$$\downarrow$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\mathrm{Tor}_1^A(M, A_i)} \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, A_{i+1}) \longrightarrow M_i \xrightarrow{\cdot x_i} M_i$$

$$M \otimes A_i \longrightarrow M \otimes A_i$$

→ индукция

другое определение глубины: $\mathrm{Ext}^q(M, N) = 0$ для всех $q \leq r$
и N: $\mathrm{supp}(N) \subset V(\mathfrak{m})$
$\iff \exists$ M-рег. посл-ть длины r