25.10.2012

И. Фаизов

Конструктивные множества

X — нетерово топологическое пространство

Опр. $Z \subset X$ — конструктивное, если $Z = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{U_i}_{\text{открытое}} \cap \underbrace{F_i}_{\text{замкнутое}}$

Равносильно, $Z = \underbrace{F_1 \setminus \ldots \setminus F_n}_{\text{замкнутые}}$

Очевидно, открытые и замкнутые конструктивны, пересечение, объединение конструктивных конструктивны

$Z \subset_{к} Y$, $Y \subset_{к} X \rightsquigarrow Z \subset_{к} X$

Прообраз конструктивного при непр. отображении конструктивен

Лемма 4.3 Z конструктивен $\iff \forall$ неприводимого замкнутого $\emptyset \neq Y \subset X$ т.ч. $Y \cap Z$ плотно в Y существует $\underset{\neq\emptyset}{U} \subset Y$ т.ч. $U \subset Y \cap Z$ (отир.)

Док-во „$\Rightarrow$" $Z \cap Y = \bigcup U_i \cap F_i' \subset \bigcup F_i' \subset Y$

$F_i' = F_i \cap Y$

$\overline{Z \cap Y} = Y \Rightarrow Y = \bigcup F_i' \Rightarrow Y = F_{i_0}'$

$\rightsquigarrow U_{i_0} \cap Y$ непусто и содержится в $Y \cap Z$

„$\Leftarrow$" $S = \{ Y \subset_{з.} X : Y \cap Z \text{ не конструктивен} \}$

$\rightarrow$ можно считать, что X' — мин. элемент $S \rightsquigarrow X' \cap Z$ не конструкт.

Если X' приводим. $\leftarrow$ Достаточно это для такого X'

$X' = X_1 \cup X_2$ $\quad Z = (Z \cap X_1) \cup \underbrace{(Z \cap X_2)}_{\text{конструктивн}}$

$\rightarrow$ можно считать, что X неприводимо

можно считать, что $\overline{Z} = X$ (иначе $Z = Z \cap \overline{Z}$ — конструктивно)

$\rightsquigarrow \exists \underset{\text{открытое непустое}}{V} \subset Z$ (по предположению)

$\rightsquigarrow Z = \underbrace{V}_{\text{открыто}} \cup \underbrace{(V^c \cap Z)}_{\text{констр.}}$ $\square$

Лемма X — т.ч. $\forall$ замкнутое неприводимое подмн-во имеет общую точку

Z — конструктивно, $x \in Z$

Z — окрестность $x \iff \forall x' : x \in \overline{\{x'\}}$ $x' \in Z$

Д-во „$\Rightarrow$" $\underset{x}{\overset{}{U}} \subset Z$ открыто

$x' \notin Z \rightsquigarrow x$ отделена открытым от $\overline{\{x'\}}$

„$\Leftarrow$": $S = \{Y \underset{з.}{\subseteq} X : x \in Y$ и $Y \cap Z$ не является окрестностью x в $Y\}$

X' — его минимальный элемент $\rightsquigarrow$ можно считать, что $X = X'$

т.е. далее считаем, что $\forall Y \underset{з.}{\overset{\neq}{\subset}} X$ такого, что $x \in Y$,

$Y \cap Z$ — окрестность x в Y

Снова редукция к неприводимому:

$X = X_1 \cup X_2 \qquad U_{1,2} \subset X_{1,2} \cap Z$

$\rightsquigarrow ((X_1 \setminus U_1) \cup (X_2 \setminus U_2))^c$ содержит x, содержится в Z

$\rightsquigarrow$ считаем, что X неприводимо

x' — общая точка X, $x' \in Z$, $\overline{Z} = X$

$\exists \underset{x \notin}{U} \overset{\text{открыто}}{\subset} \cancel{Z}$ Пусть $x \notin U$; возьмем $Y := X \setminus U$

Y замкнуто $\rightsquigarrow Y \cap Z$ — окрестность x в Y

$F = \overline{X \setminus Z}$, $x \notin F$

$(X \setminus Z \subset X \setminus U = Y)$ ибо

$\rightsquigarrow U' := X \setminus F$, тогда $x \in U'$ и $U' \subset Z$ $\square$

Утверждение X — нетерово, в котором $\forall$ замкнутое неприводимое имеет общую точку

V открыто $\Leftrightarrow \forall x \in V$
а) $x \in \overline{\{x'\}} \Rightarrow x' \in V$
б) $V \cap \overline{\{x\}}$ — окрестность x в $\overline{\{x\}}$

Д-во „$\Rightarrow$" очевидно. „$\Leftarrow$" - по первой Лемме V конструктивно $\rightsquigarrow$ является окр-стью каждой своей точки

Теорема (Шевалле)

X, Y — локально нетеровы схемы, $f : X \longrightarrow Y$ — морфизм локально конечного типа

$\rightsquigarrow$ образ конструктивного конструктивен

т.е. если $Z \subset X$ конструктивно, то $f(Z)$ конструктивно

Д-во: $Z = \bigcup Z_i$

локально замкнутое $\rightsquigarrow \coprod (Z_i)_{red}$

нильпотенты ни на что не влияют

Проверим, что $\forall$ замкнутого неприводимого $T \subset Y$

т.ч. $\overline{f(Z) \cap T} = T$, найдется непустое открытое $U \subset T \cap f(Z)$

T неприводимо $\rightsquigarrow$ м. считать, что $T = Y$,

т.е. образ $f(Z)$ плотен, т.е. f доминантный, а

Y можно считать аффинным и приведенным

Если $X = \bigcup$ замкнутых неприводимых, то Y равен замыканию образа одного из них

$\overline{Z} = X$ — аффинное неприводимое (можно считать)

$X = \operatorname{Spec} B$ $\quad Y = \operatorname{Spec} A$, $\quad A, B$ - обл. целостности

$f : A \hookrightarrow B$ и B — алгебра (конечно пор.) над A

Нужно найти непустое открытое в Y

т.е. найти $g \in A : \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \ \mathfrak{p} \not\ni g \Rightarrow \exists \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B : \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $A \subset B$, B — кон. пор. A-алгебра

$\rightsquigarrow \exists g^{\neq 0} \in A$ и $C \subset B$ - подалгебра:

$C \simeq A[T_1, \dots, T_m]$ и B_g цело над C_g

— это почти что лемма Нетер о нормализации

$\mathfrak{p} C_g \rightsquigarrow \exists \mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec} B_g \rightsquigarrow \mathfrak{q}_1 \cap C_g = \mathfrak{p} C_g$

$\rightsquigarrow$ можно взять $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap B$

$\boxed{\text{Утв.}}$ X, Y — локально нетеровы, $f : X \to Y$ — локально конечного типа

$x \in X$, $y = f(x)$

$\left(\begin{array}{c} V\text{-окрестность } x \\ \Downarrow \\ V\text{-окрестность } y \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall y' : y \in \overline{\{y'\}} \\ \exists x' : x \in \overline{\{x'\}} : f(x') = y' \end{array}$