Плоские морфизмы и открытые множества

И. Фаизов

$\boxed{\text{Теорема}}$ $f : X \longrightarrow Y$ — морфизм локально конечного типа локально нётеровых схем

f квазиплоский $\Rightarrow f$ открытый

— обсуждали в прошлый раз.

$\boxed{\text{Лемма}}$ (Плоскость в общей точке)

A — нётерова область, B — A-алгебра конечного типа, $M \in B\text{-mod}$

$\Rightarrow \exists f \in A \setminus \{0\}$: M_f — свободный A_f-модуль

Д-во $K := Q(A)$ $\qquad B_1 = B \otimes_A K$, $M_1 = M \otimes_A K$

Индукция по $\dim M_1$:

(1) $\dim M_1 = 0 \rightsquigarrow \exists g_1, \dots, g_k$ — образующие M как B-модуля

$\forall i\ \exists f_i \in A: f_i g_i = 0 \rightsquigarrow f = \prod f_i$, и локализация нулевая

(2) т. Жордана — Гельдера:

$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_q = 0$: $M_i / M_{i+1} \cong B / \mathfrak{p}_i$

Пусть лемма доказана для модулей вида $B/\mathfrak{p}_i$

$\rightsquigarrow \forall i\ \exists f_i \in A \setminus \{0\}: \left(M_i / M_{i+1}\right)_{f_i}$ — свободный A_{f_i}-модуль

$(M_{q-1})_{f_{q-1}}$ — свободный $A_{f_{q-1}}$-модуль

$(M_{q-2}/M_{q-1})_{f_{q-2}}$ свободный $A_{f_{q-2}}$-модуль $\rightsquigarrow (M_{q-2})_{f_{q-1}f_{q-2}}$ — свободный $A_{f_{q-1}f_{q-2}}$-модуль

⋮

$\rightsquigarrow$ можно считать, что $M \cong B/\mathfrak{p}_i$

после факторизации можно считать, что это область целостности

и $A \hookrightarrow B$ инъективно (иначе взять $\forall$ эл-т аннулятора)

Итак, $A \subseteq B$, B — область, и $M = B$

(3) $\dim B \otimes_A K > 0$. Была лемма, по которой найдутся

$g \in A \setminus \{0\}$, $\underset{\underset{B}{\wedge}}{C} \cong A[T_1, \dots, T_m]$: B_g цело над C_g

$\rightsquigarrow$ можно заменить A на A_g и считать, что B цело над C

$$0 \longrightarrow C^{\ell} \longrightarrow B \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

$$\ell = \dim_{\underset{\mathbb{Q}(c)}{\underset{\shortparallel}{k(T)}}} \left(B \otimes_A k(T)\right)$$

см. EGA $\underline{IV}_2$, Lemme 6.9.2. $\square$

Лемма A – нетерово, B – л.н.т. $M \in B$-mod
$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$, $M_{\mathfrak{p}}$ – плоский над $A_{\mathfrak{q}}$

Тогда $\exists\, g \in A \setminus \{0\}$ т.ч.

① $\left(M / \mathfrak{q} M\right)_g$ – плоский над $A/\mathfrak{q}$

② $\operatorname{Tor}_1^A (M, A/\mathfrak{q})_g = 0$