15.11.2012
И. Фаизов

В прошлый раз

Лемма A — нетерова область целостности, B — алгебра конечного типа,
$M \in B\text{-mod} \rightsquigarrow \exists f \in A, f \neq 0 : M_f$ — свободный A_f-модуль

Лемма A нетерово, B — алгебра кон. типа, $M \in B\text{-mod}$

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(B)$ $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A : M_{\mathfrak{p}}$ — плоский над $A_{\mathfrak{q}}$

Тогда $\exists g \in \cancel{A}B, g \neq 0$ т.ч.

① $(M/\mathfrak{q}M)_g$ — плоский над $A/\mathfrak{q}$

② $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{q})_g = 0$

Д-во Применим предыдущую лемму к $A/\mathfrak{q}$

$\rightsquigarrow \exists f \in A \setminus \mathfrak{q} : (M/\mathfrak{q}M)_f$ — плоский $A/\mathfrak{q}$-модуль

$\rightsquigarrow 0 = \operatorname{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{p}}, A/\mathfrak{q}) = \operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}}$

$\exists h \in B \setminus \mathfrak{p} : \operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{q})_h = 0 \rightsquigarrow g := f \cdot h$ □

Лемма В условиях предыдущей Леммы пусть

$\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} B : \mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{q}, \; g \notin \mathfrak{p}' \Rightarrow M_{\mathfrak{p}'}$ — плоский $A/\mathfrak{q}$-модуль.

Д-во $M_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{q}M_{\mathfrak{p}'}$ — плоский $A/\mathfrak{q}$-модуль, $\operatorname{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{p}'}, A/\mathfrak{q}) = 0$

$\rightsquigarrow$ применим лок. критерий к $A, B_{\mathfrak{p}'}, M_{\mathfrak{p}'}, \mathfrak{q}$ □

Теорема $f: X \longrightarrow Y$ — морфизм локально нетеровых схем локально конечного типа

$\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль

$\Rightarrow \mathcal{U} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x$ плоский над $\mathcal{O}_{f(x)}\}$ — открыто

Д-во $\forall x \in \mathcal{U}$ нужно проверить (1) $\forall x' : x \in \overline{\{x'\}} \Rightarrow x' \in \mathcal{U}$

(2) $\mathcal{U} \cap \overline{\{x\}}$ — окрестность x в $\overline{\{x\}}$

$X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ $\qquad M \in B\text{-mod} \leftrightarrow \mathcal{F}$

$\mathfrak{p} \in \mathcal{U}, \; \mathfrak{p} \in \overline{\{\mathfrak{p}'\}} \Rightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}' \Rightarrow \mathfrak{p}' \in \mathcal{U} \Rightarrow (1)$

подберем $\underset{\mathfrak{p}}{\overset{\Psi}{D(g)}}$: $D(g) \cap \overline{\{\mathfrak{p}\}} \subset \mathcal{U} \cap \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ — нужно взять g из Леммы $\Rightarrow (2)$ □

К. Чепуркин

$\boxed{\text{Определение}}$ A — алгебра над кольцом k

$M \in A\text{-mod}$ $\quad \mathrm{Der}_k(A, M) = \{ h : A \longrightarrow M : h$ — k-линейно и $h(fg) = f\cdot h(g) + g\cdot h(f) \}$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $h : A \longrightarrow M$, удовл. тождеству Лейбница

$h(f) = 0 \ \forall f \in k \iff h$ — k-линейно

$\mathrm{Der}_k(A, M)$ — эндофунктор в A-mod

$\boxed{\text{Опр.}}$ если этот функтор представим, то представляющий его объект называется модулем дифференциалов A над k

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_{A/k}"] \arrow[d, "\forall"'] & \Omega^1_{A/k} \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ M & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $A = k[\{T_\alpha\}]$; $\Omega^1_{A/k}$ существует и
$$\Omega^1_{A/k} = \langle dT_\alpha \rangle \text{ — свободный модуль}$$

$$d_{A/k} : A \longrightarrow \Omega^1_{A/k}$$
$$p(T) \longmapsto \sum_\alpha \frac{\partial p}{\partial T_\alpha} dT_\alpha \qquad \text{— упражнение}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \\ k \arrow[u] \arrow[r] & k' \arrow[u, "e"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "d_{B/k}"] \arrow[dr, "d_{B/k'}"'] & \Omega^1_{B/k} \arrow[d, dashed, "\exists!\, v"] \\ & \Omega^1_{B/k'} \end{tikzcd}$$

— любое k'-дифференцирование является и k-дифференцированием

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "d_{A/k}"'] & B \arrow[r, "d_{B/k}"] & \Omega^1_{B/k} \\ & \Omega^1_{A/k} \arrow[ur, "\exists!\, w"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \Omega^1_{A/k} \otimes_A B \arrow[rr, "u"] & & \Omega^1_{B/k} \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \Omega^1_{B/A} \arrow[r] & 0 \\ A \otimes_k k' \arrow[ur, "d_{A/k} \otimes e"] \arrow[rr] & & B \arrow[ur, "d_{B/k}"] \arrow[d, "id"] & \Omega^1_{B/k'} \arrow[d] & & \\ & & B \arrow[ur, "d_{B/k'}"'] & 0 & & \end{tikzcd}$$

Утверждение: это точная пос-сть B-модулей

Фиксируем $M \in B\text{-Mod}$

$\Rightarrow$ есть точная последовательность

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Der}_A(B,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Der}_k(B,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Der}_{k'}(A,M) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/k}, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{A/k} \otimes_A B, M) \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $B = A/I$. Тогда $\exists\, \Omega^1_{B/k}$ и есть точная последовательность:

$$\begin{tikzcd} I/I^2 \arrow[r] \arrow[dr] & \Omega^1_{A/k} \otimes_A B \arrow[r] & \Omega^1_{B/k} \arrow[r] & 0 \\ & A/I^2 \arrow[u, "d_{A/k}"'] & & \end{tikzcd}$$

Док-во

$0 \to \mathrm{Der}_k(B,M) \to \mathrm{Der}_k(A,M) \to \mathrm{Hom}(I/I^2, M)$ — точна

$$\begin{tikzcd} & A/I^2 \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dd, "\exists ?"] \\ I/I^2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \Omega^1_{A/k} \otimes B \arrow[d] & \\ & 0 \arrow[r, dashed] & M \end{tikzcd}$$

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\delta \longrightarrow 0$$

Применим $\mathrm{Hom}(-, M)$ $\rightsquigarrow$ получим, что $\mathrm{Coker}\,\delta = \Omega^1_{B/k}$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\forall A/k\ \exists\, \Omega^1_{A/k}$

$\boxed{\text{Лемма}}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr] & \Omega \arrow[d, shift left, "w"] \\ & \Omega^1_{A/k} \arrow[u, shift left, dashed, "w'"] \end{tikzcd}$$

d — k-дифференцирование

$\Omega = \langle d(a) \rangle \rightsquigarrow w$ — изоморфизм

Док-во

$wd = d_{A/k}$ $\quad w' d_{A/k} = d$

w' — сюръективно $\quad \rightsquigarrow w'wd = w'd_{A/k} = d$

$ww'd_{A/k} = wd = d_{A/k} \rightsquigarrow ww' = \mathrm{id}_{\Omega'}$ универсальность Ω^1

$\square$

Следствие: Ω^1 порождается эл-тами вида $d_{A/k}(a)$

Утверждение B_1, B_2 — k-алгебры

$$A = B_1 \otimes_k B_2 \rightsquigarrow \Omega^1_{A/k} = \left(\Omega^1_{B_1/k} \otimes_{B_1} A\right) \oplus \left(\Omega^1_{B_2/k} \otimes_{B_2} A\right)$$

Док-во $Der(B_1 \otimes_k B_2, M) = Der(B_1, M) \oplus Der(B_2, M)$ □

Утверждение
Пусть B — k-алгебра, $A = B \otimes_k B$

$$p: B \otimes B \longrightarrow B \qquad I := Ker(p)$$
$$f \otimes g \longmapsto fg$$

Тогда последовательность

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/k} \longrightarrow 0$$

точна

и, кроме того, $I/I^2 \cong \Omega^1_{B/k}$. $d(f) = f \otimes 1 - 1 \otimes f$
$B \to I/I^2$

Лемма $I = \langle 1 \otimes f - f \otimes 1 \rangle$

$$\sum f_i \otimes g_i = \sum_i (f_i \otimes 1)(1 \otimes g_i - g_i \otimes 1) \qquad \sum f_i g_i = 0$$

покажем, что
$0 \to I/I^2 \to \Omega^1_{A/k} \otimes_A B$ расщепляется:

$$\begin{tikzcd}
I/I^2 \arrow[r, "\delta"] & \Omega^1_{A/k} \otimes_A B \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \Omega^1_{B/k} \\
& (\Omega^1_{B/k} \otimes A) \oplus (\Omega^1_{B/k} \otimes A) & \\
B \arrow[uu] \arrow[uurr, bend right, "d_{B/k}"'] & &
\end{tikzcd}$$

проверим, что $pr_2 \circ \delta$ = изоморфизм

$$f \in B \overset{d}{\longmapsto} f \otimes 1 - 1 \otimes f \overset{\delta}{\longmapsto} -d_{B/k} f \oplus d_{B/k} f \overset{pr_2}{\longmapsto} d_{B/k} f$$

⇝ эта диаграмма коммутативна

Пример $B = k[T_\alpha] \rightsquigarrow A = B \otimes_k B = k[T_\alpha, U_\beta]$; $h_\alpha = U_\alpha - T_\alpha$

$I/I^2 = \langle h_\alpha \rangle$; $I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{B/k}$
$h_\alpha \longmapsto dT_\alpha$

⇝ для $P(T)$ $P(T+h) - P(T)$ с точн. до $I^2 \rightsquigarrow \sum \frac{\partial P}{\partial T_\alpha} h_\alpha$