$\boxed{\text{Утв.}}$ $A = B_1 \times B_2$ — k-алгебра

$$\Rightarrow \Omega^1_{A/k} = \Omega^1_{B_1/k} \oplus \Omega^1_{B_2/k}$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $A' = A \otimes_k k'$

$$\left(\begin{tikzcd} A \arrow[r] & A' \\ k \arrow[u] \arrow[r] & k' \arrow[u, "e"'] \end{tikzcd}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Omega^1_{A'/k'} = \Omega^1_{A/k} \otimes_A A'$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $A = B_1 \otimes_k B_2$

$$\rightsquigarrow 0 \longrightarrow \Omega_{B_1/k} \otimes_{B_1} A \longrightarrow \Omega^1_{A/k} \longrightarrow \Omega^1_{A/B_1} \longrightarrow 0$$

точная расщепляющаяся

$$\Omega^1_{A/B_1} = \Omega^1_{B/k} \otimes_{B_1} A \oplus \Omega^1_{A/B_2} \otimes_{B_2} A$$

<u>Док-во:</u>

$$\begin{tikzcd} B_2 \arrow[r] & B_1 \otimes_k B_2 \\ k \arrow[u] \arrow[r] & B_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \text{ — \underline{конормальный пучок}}}$

$\boxed{\text{Утв.}}$ A — k-алгебра, σ — мульт. система в k

S — мульт. система в A $\quad \sigma \subseteq S$

Тогда
$$\Omega^1_{S^{-1}A/\sigma^{-1}k} = S^{-1}\Omega^1_{A/k}$$

и
$$d\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{s\,da - a\,ds}{s^2}$$

<u>Док-во:</u>

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & S^{-1}A \arrow[r, "d_{S^{-1}A}"] \arrow[d, "d"'] & \Omega^1_{S^{-1}A/\sigma^{-1}k} \\ \Omega^1_{A/k} \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "w"] & S^{-1}\Omega^1_{A/k} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

изоморфизм

$\square$

$X \longrightarrow S$ — морфизм схем

$(\Omega^1_{X/S}, d_{X/S})$ — дифференциальных форм (квазикогерентный пучок)

$\mathcal{O}_X \xrightarrow{d_{X/S}} \Omega^1_{X/S}$

Если X локально конечного типа над S, то $\Omega^1_{X/S}$ — конечного типа

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} \rightsquigarrow \quad f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$

$i : X \longrightarrow Y$ — вложение, $\mathcal{J}$ — соотв. пучок идеалов: $\mathcal{J} \to \mathcal{O}_Y \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X \to 0$

$$i^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \xrightarrow{\delta} i^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0$$

$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ называется <u>конормальным пучком</u>

$\Delta_{X/S} : X \longrightarrow X \times_S X$ — замкнутое вложение

$$\rightsquigarrow \Omega^1_{X/S} = (\Delta_{X/S})^*\left(\mathcal{J}_{X/S}/\mathcal{J}^2_{X/S}\right)$$

$X' = X \times_S S'$

$f : X' \longrightarrow X \quad \rightsquigarrow f^*\Omega^1_{X/S} \simeq \Omega^1_{X'/S'}$

Квазиконечные морфизмы

$\boxed{\text{Опр.}}$ X, Y — схемы, $f : X \longrightarrow Y$ — морфизм локально конечного типа

f называется <u>квазиконечным</u>, если $\forall x \in X$

$\mathcal{O}_{X,x}$ квазиконечная алгебра над $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$, $f(x) = y$

то есть, $\mathcal{O}_{X,x}/m_y\mathcal{O}_{X,x}$ — конечномерное векторное пр-во над $k(y)$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Конечный морфизм квазиконечен

Утв. X, Y, f как выше, $y = f(x) \Rightarrow$ равносильны:

1. $\mathcal{O}_{X,x}$ квазиконечно над $\mathcal{O}_{Y,y}$
2. x изолирован в слое, то есть, $\{x\}$ открыто в $f^{-1}(y)$
3. a) $\exists r : m_x^r \subset m_y \mathcal{O}_{X,x}$
   в) $k(x)$ — конечное алгебраическое расширение $k(y)$

Д-во: $Y \longrightarrow Spec(\mathcal{O}_{Y,y})$ $\quad Spec\, A = X$

$f^{-1}(y) = Spec\, B \quad B = A/m_y A$

I — ядро локализации $B \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/m_y\mathcal{O}_{X,x}$; без ограничения общности считаем $I = 0$

т.е. $B \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/m_y\mathcal{O}_{X,x}$

Предположим, что (1) выполнено

Тогда $B \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/m_y\mathcal{O}_{X,x}$ — к/м в.п. над $k(y)$

$\rightsquigarrow B$ — к/м в.п. над $k(y) \rightsquigarrow$ это артиново кольцо

$\rightsquigarrow$ его спектр дискретен $\rightsquigarrow \forall$ точка — изолированная $\rightsquigarrow$ (2)

$\left(m_x/m_y\mathcal{O}_{X,x}\right)^n = 0 \rightsquigarrow$ (3 а) (радикал)

$k(x)$ — фактор этого кольца $\rightsquigarrow$ это тоже к/м в.п. над $k(y) \rightsquigarrow$ (3в)

Предположим, что (2) выполнено.

можно считать, что $f^{-1}(y) = \{x\} \rightsquigarrow B = \mathcal{O}_{X,x}$

и $\mathcal{O}_{X,x}/m_y\mathcal{O}_{X,x}$ имеет один простой идеал
алг. кон. типа над $k(y)$

$\rightsquigarrow$ по т. Гильберта о нулях $\rightsquigarrow$(1) $\rightsquigarrow$(3)
(примерно, нетеровость + $\dim 0 \Leftrightarrow$ артиновость)

(3) $\Rightarrow$ (1): **Лемма** $0 = m_1 \cdot \ldots \cdot m_k \Rightarrow \forall$ простой идеал — один из этих; и A артиново; если A/m_i — алг. кон. типа$/k \Rightarrow A$ — конечномерна. $\square$

Утв. X, Y, f как выше, $f(x) = y$

$\mathcal{O}_{X,x}$ квазиконечно над $\mathcal{O}_{Y,y} \Leftrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ — квазиконечно над $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$

Док-во: „$\Rightarrow$" $\text{„}k(y)^n\text{"} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$

$$\mathcal{O}^n_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

$\exists r: \mathfrak{m}_x^r \subseteq \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x} \rightsquigarrow \hat{\varphi}: \hat{\mathcal{O}}^n_{Y,y} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$

Лемма

$$\begin{tikzcd} M/\mathfrak{q}M \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d] & N/\mathfrak{q}N \arrow[d, "\beta"] \\ \hat{M}/\mathfrak{q}\hat{M} \arrow[r, "\varphi'"] & \hat{N}/\mathfrak{q}\hat{N} \end{tikzcd}$$

$A \to B$, $\mathfrak{q} \triangleleft A$, $\mathfrak{q}' \triangleleft B$. $\quad \mathfrak{q}B \subseteq \mathfrak{q}' \subset \operatorname{rad} B$.

1) $\hat{\varphi}: \hat{M} \to \hat{N}$ — сюръективно, если β, φ'' — сюръективны

2) $\hat{\varphi}$ — сюръективно $\Rightarrow$ β — биекция и φ'' — сюръекция

„$\Leftarrow$" доказывается по (2) с учетом того, что если $\hat{\mathfrak{m}}_x^r \subset \hat{\mathfrak{m}}_y \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$, то $\mathfrak{m}_x \subset \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x}$ $\square$

Лемма $A \xrightarrow{f} B$, $\mathfrak{m} \triangleleft A$, $\mathfrak{n} \triangleleft B$. $\quad \hat{\mathfrak{n}}^r \subseteq \hat{\mathfrak{m}}\hat{B} \Rightarrow \mathfrak{n}^r \subseteq \mathfrak{m}B$

Док-во: $\beta: \mathfrak{n}^r \longrightarrow B/\mathfrak{m}B \rightsquigarrow \hat{\beta}: \hat{\mathfrak{n}}^r \longrightarrow \hat{B}/\hat{\mathfrak{m}}\hat{B}$ и $\hat{\beta} = 0$

Значит, и $\beta = 0$ (по т. Крулля о пересечении) $\square$