29.11.2012

А. Цыбышев

Опр. $f: X \longrightarrow Y$ неразветвлен в точке $x \in X$, если $y = f(x)$, ~~если~~

1. $f_y(\mathfrak{m}_y)\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$
2. $k(x) \longleftarrow k(y)$ — конечный сепарабельный

Лемма k — поле, K — артинова k-алгебра конечного типа, $K \otimes_k \bar{k}$ — приведенное $\Rightarrow K$ — конечное произведение конечных сепараб. расширений

__Док-во__ $\alpha \in K$

$$k(\alpha) \cong k[T]/f(T) \rightsquigarrow k(\alpha) \otimes \bar{k} \cong \prod \bar{k}[T] / f_i(T)^{r_i}$$

$\rightsquigarrow$ все $r_i = 1$

Предложение $f: X \longrightarrow Y$ — локально конечного типа

локально нетеровы схемы

Тогда равносильны:

1. $\left(\Omega^1_{X/Y}\right)_x = 0$
2. $\Delta_{X/Y}$ — открытая иммерсия в окрестности x
3. f неразветвлен в x

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{X/Y}: X \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "id_X"'] \arrow[rr, bend left, "id_X"] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

__Док-во__ (1) $\Rightarrow$ (2):

$X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(k)$

$B \otimes_k B \longrightarrow B$ $\qquad I = \mathrm{Ker}(\underset{\overset{\|}{A}}{B \otimes_k B} \longrightarrow B)$

$$0 \to I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/k} \longrightarrow 0$$

$\downarrow$ локализуем в x $\qquad \Omega^1_{B_1 \otimes_k B_2} = \Omega^1_{B_1/k} \otimes_{B_2} A \oplus \Omega^1_{B_2/k} \otimes_{B_1} A$

$\rightsquigarrow (I/I^2)_x = 0 \rightsquigarrow I_x = 0$ по Л. НАКАЯМЫ

(2) => (3):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x/m_y\mathcal{O}_x) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, k(y) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$K := \overline{k(y)}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "(1,z)=\psi"'] & Y \arrow[d] \\ X\times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \psi^{-1}(\Delta) = \{z\}$

↓

z открыто и замкнуто

↓

это спектр нульмерного артинова кольца

Переходя к окрестности $\rightsquigarrow$ м. считать, что это локальное артиново

$A_i \longleftarrow A_i \otimes_K A_i$

$\rightsquigarrow A_i$ — поле (конечное расширение K)

(3) => (1)

$$\Omega^1_{A\otimes_B k(y)/k(y)} \cong \Omega^1_{A/B} \otimes_B k(y)$$

Если $\uparrow = 0$, то и $\Omega^1_{A/B} \otimes_B \mathcal{O}_y = 0$ (лемма Накаямы)

$\mathcal{O}_{X_x} = (\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_K A)_x \rightsquigarrow \Omega^1_{A/B} \otimes_A \mathcal{O}_x = 0$

$\Omega^1_{\mathrm{Spec}\, k(x)/\mathrm{Spec}\, k(y)} =: \Omega^1_{L/k} = 0$ по следующей лемме

□

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\Omega^1_{L/k} = 0$, если L/k — конечное сепарабельное

Док-во: $D: L \longrightarrow M$, $a \in L$, $f(t)$ — мин. многочлен a

$f(a) = 0 \rightsquigarrow \underset{\neq 0}{f'(a)} D(a) = 0 \rightsquigarrow D(a) = 0.$

$\boxed{\text{Предл. 3.5}}$ (1) $\forall$ вложение неразветвлено

(2) Композиция неразветвленных неразветвлено

(3) Замена базы

(4) Произведение

(5) $g \circ f$ — неразв. => f — неразв.

(6) f — неразв. => f_{red} — неразв.

Предл. 3.6

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] \arrow[dr, mapsto, bend right] & Y \arrow[d] \\ & s \in S \end{tikzcd}$$

— локально нетеровы S-схемы
— лок. кон. типа

$\Rightarrow$ (1) f неразв. в $x \Leftrightarrow f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$ — сюръекция в x

(2) f неразветвл. в $x \Leftrightarrow f \otimes_S k(s) : X \otimes_S k(s) \longrightarrow Y \otimes_S k(s)$ неразв. в x

Док-во: $f^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$

Предл. 3.7

$f : X \longrightarrow Y$ — лок. кон. морфизм лок. нетеровых схем

$x \in X$, $y = f(x)$. Тогда

f неразветв. в $x \Leftrightarrow \hat{\mathcal{O}}_x / \hat{\mathcal{O}}_y$ неразветвлен

Более того, если $k(x) = k(y)$ или $k(y)$ — а.з. поле,

f неразветвл. в $x \Rightarrow \hat{\mathcal{O}}_y \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_x$ — сюръекция

Док-во "$\Leftarrow$": $\hat{\mathcal{O}}_x / \hat{\mathcal{O}}_y$ — неразв. $\Rightarrow \hat{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_y \hat{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{(2.5)} \mathfrak{m}_x \subset \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x \Rightarrow \mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$.

"$\Rightarrow$" — легко

Второе: если $k(y)$ — а.з. поле $\Rightarrow k(x) = k(y)$

$\rightsquigarrow \hat{\mathcal{O}}_y \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_x$ — сюръекция