Накрытия

20.12.2012

А. Ананьевский

$\boxed{\text{Опр.}}$ X, Y — локально нетеровы схемы.
$f: X \longrightarrow Y$ — накрытие (разветвленное), если f конечный и сюръективный.

Например. $\mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{C}[z]$
$z \longmapsto z^2$

f — неразветвленное ~~накрытие~~ (плоское, этальное) накрытие, если f — конечный, сюръективный и неразветвленный (плоский, этальный).

$\boxed{\text{Предложение}}$ $f: X \longrightarrow Y$ — накрытие $\Rightarrow \dim X = \dim Y$

Д-во: B/A — конечно порожденный модуль
$\rightarrow$ для целых расширений это известно.

$\boxed{\text{Опр.}}$ X, Y — локально нетеровы, $f: X \longrightarrow Y$ — локально конечного типа. Рассмотрим $\{x \in X \mid f \text{ разветвлен в } x\}$ — „локус ветвления" замкнутая подсхема в X:
f ветвится в $x \Leftrightarrow (\Omega^1_{X/Y})_x \neq 0$
$\rightarrow$ локус ветвления задается пучком идеалов $\mathcal{V}_{X/Y} = \mathrm{Ann}(\Omega^1_{X/Y})$
„кэлерова дифферента"

$\boxed{\text{Опр.}}$ $f: X \to Y$ — накрытие, $F \in \mathrm{Coh}(\mathcal{O}_X)$
F — плоский над Y, $g \in \mathrm{End}(F)$
$\Rightarrow \exists$ покрытие $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$: $f_* F|_{V_\alpha}$ — свободные
$\rightsquigarrow \mathrm{tr}(g|_{f^{-1}(V_\alpha)}) \in \Gamma(V_\alpha, \mathcal{O}_Y) \rightsquigarrow \mathrm{tr}(g) \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$
$\mathrm{Tr}: \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_Y}(f_* F) \longrightarrow \mathcal{O}_Y$

X/Y — плоское накрытие $\Rightarrow \mathrm{Tr}_{X/Y}: f_*\mathcal{O}_X \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y$

$u = \mathrm{astr}_{X/Y}: f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow (f_*\mathcal{O}_X)^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$

$V \subseteq Y$ $\quad a, b \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \longrightarrow u_V(a)(b) = (\mathrm{Tr}_{X/Y})_V(ab)$
↑ откр

$d_{X/Y} := \det u \in \mathrm{Hom}(\det f_* \mathcal{O}_X, \det(f_*\mathcal{O}_X)^\vee)$

дискриминант

$\mathrm{Im}(d_{X/Y} \otimes \mathrm{id} : \det f_*\mathcal{O}_X \otimes \det f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y) = \mathcal{D}_{X/Y}$

— дискриминантный идеал

$\{y \in Y \mid (\mathcal{D}_{X/Y})_y \neq \mathcal{O}_{Y,y}\}$ — дискриминантный локус

$\boxed{\text{Пример}}$ $\mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{C}[z]$

$z \longmapsto z^2$

$tr(f_1(z^2) + z\cdot f_2(z^2)) = 2f_1(z^2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2z^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Предложение}}$ A, B — нётеровы кольца, B/A — конечный свободный модуль

→ Равносильны:

1. $\mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ — этальное накрытие
2. $(a,b) \longmapsto tr_{B/A}(ab)$ — невырожденная форма
3. $\mathcal{D}_{\mathrm{Spec} B/\mathrm{Spec} A} = A$

Док-во (2) $\Leftrightarrow$ (3): $\mathcal{D}_{\mathrm{Spec} B/\mathrm{Spec} A} = \mathrm{Im}(\Lambda^n B \otimes \Lambda^n B \xrightarrow{\det tr} A)$

$\Updownarrow$

$\Lambda^n B \longrightarrow \Lambda^n B^\vee$, $\Lambda^n B \cong A$, $\Lambda^n B^\vee \cong A$

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

B/A плоское $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ этален

$\Updownarrow$

он неразветвлен

нужно сначала везде отлокализовать! $k = A_p/pA_p$

$\forall p \in \mathrm{Spec}\, A$ B/pB — сепарабельная A/pA-алгебра

$\Leftrightarrow B/pB \otimes \bar{k} \simeq \prod \bar{k}$

$B/pB \otimes B/pB \xrightarrow{tr} A/pA$ — невырожд.

$\Updownarrow$ tr невырожд.

$\Updownarrow$

$(B/pB \otimes \bar{k}) \otimes (B/pB \otimes \bar{k}) \longrightarrow \bar{k}$ — невырожд.

$\prod B_i$

$B_i \otimes B_i \longrightarrow \bar{k}$ — невырожд. $\forall i$

т.е. B_i — артиновы лок. кольца.

$B_i \otimes B_i \xrightarrow{tr} \bar{k}$ — невырожд. $\Longleftrightarrow B_i = \bar{k}$

„$\Leftarrow$" очевидно, „$\Rightarrow$": $m \in \mathrm{Max}\, B_i \rightsquigarrow \exists s: \underset{\alpha}{m^{s-1}} \neq 0,\ m^s = 0$

$\rightsquigarrow Tr(\alpha \cdot x) = 0\ \forall x \in B_i$

$B_i = \bar{k} \oplus m$

$\rightsquigarrow Tr(\alpha\cdot x) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & \boxed{0} \end{pmatrix} = 0$

$\boxed{\text{Лемма}}$ B — полулокально, $\{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\} = \operatorname{Max} B$
$\Rightarrow \hat{B} = \prod \widehat{B_{\mathfrak{m}_i}}$

Д-во: $B/_{q^r B} \cong \prod (B/_{q^r B})_{\mathfrak{m}_i}$

? необходимо условие на q : например, $q \supset \bigcap \mathfrak{m}_i$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (чистота локуса ветвления)

X, Y — локально нетеровы, X/Y — плоское накрытие
$\Rightarrow$ локус ветвления имеет чистую коразмерность 1

Д-во: Пусть x — точка ветвления, $y = f(x)$
Достаточно показать, что $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_x/\mathcal{O}_y}$ содержится в $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_x$, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$

Локально по Y
$\rightarrow A := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}$
$B := \Gamma(\Gamma \times_Y \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}, \mathcal{O}_X)$
B/A — кон $\rightsquigarrow B$ — полулок., $\operatorname{rad} B = \mathfrak{m}_y B$

$$B \otimes_A \hat{A} = \hat{B} = \prod_{x_i \in f^{-1}(y)} \hat{\mathcal{O}}_{x_i} \Rightarrow \mathcal{D}_{B/A} \otimes_A \hat{A} = \mathcal{D}_{\hat{B}/\hat{A}} = \bigoplus \mathcal{D}_{\hat{\mathcal{O}}_{x_i}/\hat{\mathcal{O}}_y}$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{D}_{\hat{\mathcal{O}}_x/\hat{\mathcal{O}}_y} = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_x/\mathcal{O}_y} \hat{\mathcal{O}}_y$$

$\hat{\mathcal{O}}_x / \hat{\mathcal{O}}_y$ — конечный плоский, не эталный

$$\rightarrow \mathcal{D}_{\hat{\mathcal{O}}_x/\hat{\mathcal{O}}_y} \subseteq \mathfrak{m}_y \hat{\mathcal{O}}_y \rightsquigarrow \mathcal{D}_{\hat{\mathcal{O}}_x/\hat{\mathcal{O}}_y} \subseteq \mathfrak{p} \trianglelefteq \hat{\mathcal{O}}_y, \quad \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$$

$\hat{\mathcal{O}}_x$ не эт. над $\hat{\mathcal{O}}_y$ в неп. $q \trianglelefteq \hat{\mathcal{O}}_x$, $q \cap \hat{\mathcal{O}}_y = \mathfrak{p}$, $\operatorname{ht} q = 1$. $\square$

$\boxed{\text{Лемма}}$ B/A $\quad t \in B$: $B = A[t]/_{p(t)}$
① $g(t) = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_{B/A} \supseteq g'(t) B$ $\qquad (g \in A[x])$
② $\mathcal{D}_{B/A} = p'(t) B$

Д-во $I \longrightarrow A[x] \longrightarrow B$

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{A[x]/A} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow 0$$

$$\Omega^1_{B/A} = B/d(I)B,$$ где $d(I) = \{Q'(t) \mid Q(t) \in I\}$

$$\rightsquigarrow d(I)B = \mathfrak{d}_{B/A} = p'(t)B \supseteq g'(t)B$$

$\boxed{\text{Предложение}}$ A — нетерово, $B = A[t]/g(t)$, $q \in \operatorname{Spec} B$, $p = A \cap q$. Тогда

① B_q/A_p неразветвлено $\iff (g, g')A_p[x] = A_p[x]$

② Пусть $g(x) = a_0x^n + \dots$, $a_0 \in A^*$. Тогда B_q/A_p — этальное расширение $\iff g'(t) \notin q$

Док-во $\mathfrak{d}_{B/A} = g'(t)B$

1) Неразветвленность $\iff \mathfrak{d}_{B_q/A_p} = B_q \iff g'(t) \in B_q^* \iff (g, g')A_p[x] = A_p[x]$

2) B/A — свободный

$\boxed{\text{Теорема}}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $g \in A[x]$ — <u>сепарабелен</u>, если
① $g(x) = a_0x^n + \dots$, $a_0 \in A^*$
② $(g, g')A[x] = A[x]$

A — локальное нетерово кольцо, $m \in \operatorname{Max}(A)$, $k = A/m$, B/A — конечный модуль, $K = B \otimes_A k$, $n = [K : k]$. Пусть $|k| = \infty$ или B — локальное кольцо.

Тогда B/A этальное (неразветвленное) $\iff B \cong A[x]/g(x)A(x)$ и g — сепараб.

Док-во "⇐" — легко. "⇒": K/k — сепар. $\rightsquigarrow 1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ — базис K/k. Пусть $t \in B$ т.ч. $\bar{t} = u$.

$$\left(\left(A[x]/g(x)A[x]\right)/I\right)$$

Тогда $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ порождают $B \rightsquigarrow t^n$ = лин. комб. предыдущих — это g

$\rightsquigarrow (g, g')A[x] = A[x] \mod mA[x] \rightsquigarrow (g, g')A[x] = A[x] \rightsquigarrow g$ — сепарабелен

Л. Накаямы

$A[x]/g(x)A[x] \longrightarrow B$ — этально, эпи, (мономорфизм на уровне схем) → это открытое вложение

A