F. Morel, $\mathbb{A}^1$-topology over a field

А. Ненашев

k – сов. мо $\quad \mathcal{H}(\mathbb{A}^1(k)) = \Delta^{op} Sh_{Nis}[W_s, W_{\mathbb{A}^1}]$

$X \in \mathcal{H}(k) \to \pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ – пучок, асс. с $U \longmapsto [U, X]_{\mathcal{H}(k)}$

$\pi_n^{\mathbb{A}^1}(X, x_0)$ – пучок, асс. с $U \longmapsto [\Sigma^n(U_+), (X, x_0)]_{\mathcal{H}(k)}$.

симм. надстройка

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(X)$ – сильно гомотоп. инвар.

(H^0, H^1 – гомот. инв.)

$n \geq 2 \rightsquigarrow \pi_n^{\mathbb{A}^1}(X)$ – строго гомотоп. инвар.

($\rightsquigarrow H^i$ – гомотоп. инв.)

Conjecture: $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ – гомотоп. инв. пучок

$\boxed{\text{Опр.}}$ S – неразветвленный предпучок на Sm/k, если

(0) $X \in Sm_k \rightsquigarrow S(X) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\alpha \in X^{(0)}} S(X_\alpha)$

(1) $X \in Sm_k \to S(X) \hookrightarrow S(U)$

$U \subset X$ открытое плотное во всех компонентах

(2) $S(X) \simeq \bigcap_{y \in X^{(1)}} S(\mathcal{O}_{X,y})$ (внутри $S(k(X))$)

$\boxed{\text{Опр.}}$ U – сущ. гл., если $U = \lim U_\alpha$, $U_\alpha \in Sm/k$

$U_\alpha \longrightarrow U_\beta$

афф. эт.

$\boxed{\text{Примеры}}$ (1) S – пучок с трансферами в ab

(2) $X \longmapsto W(X)$

Опр. $\mathcal{F}_k$ – категория $\{L|k \mid \operatorname{tr.deg} L < \infty\}$

Spec L – сущ. гладкая схема

$\widetilde{Sm}_k$ – гладкие многообразия с гладкими морфизмами

Опр. $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ – данные:

D1 $S : \mathcal{F}_k \longrightarrow Sets$

D2 $\forall v$ – дискр. норм-я $\overset{\text{поля}}{F}$ $S(\mathcal{O}_v) \subset S(F)$

\+ аксиомы

A1 $E \subset F$ – сепар. расширение в $\mathcal{F}_k$

v – д.н. F, w – его сужение на E : $v|_E = w$

(т.е. индекс ветвления равен 1)

$$\begin{tikzcd} S(\mathcal{O}_w) \arrow[r] \arrow[d, hook] & S(\mathcal{O}_v) \arrow[d, hook] \\ S(E) \arrow[r] & S(F) \end{tikzcd}$$

если при этом $k(w) \xrightarrow{\sim} k(v)$, то этот квадрат декартов

A2 $X \in Sm_k$ неприводима, $F = k(X)$

$\rightsquigarrow \forall x \in S(F)$ x не принадлежит конечному числу

$S(\mathcal{O}_{x,v})$ $(v$ – д.н. $F)$

Утверждение $\left\{\text{неразв. пучки} / \widetilde{Sm}_k\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\widetilde{\mathcal{F}}_k \text{ – данные}\right\}$

очевидный функтор

<u>Док-во</u> $X \in Sm_k$ – неприводима

положим $S(X) := \bigcap\limits_{v\text{-д.н. } k(X)} S(\mathcal{O}_v)$

пусть $f : Y \longrightarrow X$ – гладкий морфизм

$\rightarrow \forall x \in X^{(1)}$ $f^{-1}(x) \in Y^{(1)}$ $\rightarrow$ $v_x \longmapsto v_{f^{-1}(x)}$

$$\begin{tikzcd} S(k(Y)) & S(k(X)) \arrow[l] \\ S(Y) \arrow[u, phantom, "\cup"] & S(X) \arrow[l] \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd} \qquad S(\mathcal{O}_v) \longrightarrow S(\mathcal{O}_{v_{f^{-1}(x)}})$$

$\square$

Опр $\mathcal{F}_k$ — данные.

(D1), (D2) = $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ — данные

(D3) $\forall F \in \mathcal{F}_k$ $\forall v$ — д.н. на F $\quad S(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{s_v} S(k(v))$

+ аксиомы (A1), (A2),

(A3) (i) $E \subset F$ $\quad v$ — д.н. F, $\quad v|_E = w$ — д.н. E

$$\begin{tikzcd}
S(\mathcal{O}_w) \arrow[r] \arrow[d, "s_w"] & S(\mathcal{O}_v) \arrow[d] \\
S(k(w)) \arrow[r] & S(k(v))
\end{tikzcd}$$

(ii) $E \subset F$ $\quad v$ — д.н F, $\quad v|_E = 0$

$$\rightarrow \quad \begin{tikzcd}
S(E) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & S(F) \\
& S(\mathcal{O}_v) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \qquad j : E \hookrightarrow k(v)$$

$$\begin{tikzcd}
S(E) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "S(j)"'] & S(\mathcal{O}_v) \arrow[r] & S(k(v))
\end{tikzcd}$$

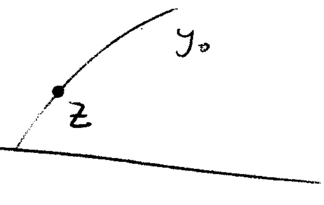
(A4) (i) $X \in Sm_k$ — локально размерности 2

$z \in X^{(2)}$ — замкнутая точка

$\forall y_0 \in X^{(1)}$, $\bar{y}_0 \in Sm_k$ $\rightsquigarrow$ s_{y_0}:

$$\begin{tikzcd}
S(\mathcal{O}_{y_0}) \arrow[r] & S(k(y_0)) \\
\bigcap\limits_{y \in X^{(1)}} S(\mathcal{O}_y) \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed] & S(\mathcal{O}_{y_0,z}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

(ii)
$$\begin{tikzcd}
\bigcap\limits_{y \in X^{(1)}} S(\mathcal{O}_{X,y}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{не зав. от выбора } y_0"'] & S(\mathcal{O}_{y_0,z}) \arrow[r] & S(k(z))
\end{tikzcd}$$



Для замкнутого вложения $i: Y \longrightarrow X$ коразмерности 1 строим $S(i): S(X) \longrightarrow S(Y)$

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & S(Y) \arrow[d, hook] \\
S(\mathcal{O}_{X,y}) \arrow[r] & S(k(y))
\end{tikzcd}$$