$\boxed{09.07.2013}$

А. Нешитов

(1) G — неразветвленный пучок групп

- хотим понять условия на G такие, чтобы он оказался (сильно ~~строго~~) гомотопически инвариантен

(2) M — неразветвленный пучок $\mathbb{Z}$-градуированных абелевых групп.

- хотим понять условия на M, чтобы он оказался строго ~~сильно~~ гомотоп. инвариантен

Опр. Пусть G — пучок групп (неразветвл.)

$F \in \mathcal{F}_k$

$$H^1_v(\mathcal{O}_v, G) := G(F)/G(\mathcal{O}_v) \quad , v \text{ — дискр. норм. } F$$

$X \in Sm/k$, $y \in X^{(1)}$ $\rightsquigarrow$ мн-ва с отм. точкой

$$H^1_y(X, G) := H^1_{v_y}(\mathcal{O}_{X,y}, G)$$

аналогия с афф. грассманианом:

$$G(k((t)))/G(k[[t]])$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(k((t))) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(k[x^{-1}]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, k[[t]] & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Рассмотрим множество

$$\prod_{y \in X^{(1)}}' H^1_y(X, G) \quad \leftarrow \text{ограниченное}$$

$G(F)$ на нем действует (сдвигами)

Каков стабилизатор отмеченной точки?

это $\bigcap_{y \in X^{(1)}} G(\mathcal{O}_{X,y}) = G(X)$

Опр. $z \in X^{(2)}$ $\quad H^2_z(X, G) :=$ мн-во орбит $\prod_{y \in X_z^{(1)}}' H^1_y(X; G)$

под действием $G(k(X_z))$

$$\rightsquigarrow \quad 1 \longrightarrow G(X) \longrightarrow G(F) \Longrightarrow \prod_{y \in X^{(1)}}' H^1_y(X, G) \longrightarrow \coprod_{z \in X^{(2)}} H^2_z(X, G)$$

$1 \longrightarrow H \hookrightarrow G \Longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} F$ наз. точной, если $G \curvearrowright E$, $G \curvearrowright F$ тривиально, E, F — с отм. точкой, $\mathrm{Ker}\, \alpha = G \cdot pt_E$, H — стабилизатор pt_E

она точна в строгом смысле, если

$\exists\ F \hookrightarrow G\backslash E$ — вложение

Наша посл-ть

$$1 \longrightarrow G(X) \longrightarrow G(F) \Rightarrow \prod_{y\in X^{(1)}}' H^1_y(X,G) \to \prod_{z\in X^{(2)}}' H^2_z(X,G)$$

— точная, но $\prod'$ не обязана попадать внутрь $\prod'$ если это выполнено (это наз. аксиомой A2'), то справа можно написать $\prod'$ и она строго точна

Если $\dim X \leq 1$, то $H^1_{Zar}(X,G) = \underbrace{\prod_{y\in X^{(1)}} H^1_y(X,G)}_{G(k(X))}$

Доп. аксиомы:

$\boxed{A5}$ (i) $E\subset F$ — сеп. расширение,

v — д.н. на F, $v|_E = w$ — д.н. на E

индекс ветвления $=1$

$k(w) \xrightarrow{\sim} k(v) \Rightarrow H^1_w(\mathcal{O}_w, G) \longrightarrow H^1_v(\mathcal{O}_v, G)$

(ii) X, X' — гладкие локальные разм-ти 2

Z, Z' — з. точки, $k(z) \simeq k(z')$ — индуцирован этальным $X \longrightarrow X'$

$\Rightarrow H^2_{z'}(X',G) \longrightarrow H^2_z(X,G)$ имеет трив. ядро.

$\boxed{A6}$ $\mathcal{U}$ — локализация гладкой k-схемы в точке $\operatorname{codim} \leq 1$

$$\to 1 \to G(\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}}) \hookrightarrow G(k(\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}})) \Rightarrow \prod_{y\in \mathbb{A}^{1\,(1)}_{\mathcal{U}}}' H^1_y(\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}}) \to \prod_{z\in \mathbb{A}^{1\,(2)}_{\mathcal{U}}}' H^2_z(\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}})$$

точна и $G(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}})$

$\boxed{\text{Теорема}}$ G — неразв. пучок, удовл. A2', A5, A6

$\Rightarrow G$ ~~[illegible]~~ сильно $\mathbb{A}^1$-инв. и $H^1_{Zar}(X,G) \xrightarrow{\sim} H^1_{Nis}(X,G)$

(2) M — неразв. $\mathbb{Z}$-градуир. пучок абелевых групп.

Начинаем с $M_*: \mathcal{F}_k \longrightarrow Ab_*$

+ доп. структура:

(i) стр-ра $\mathbb{Z}[F^*/(F^*)^2]$-модуля на $M_*(F)$

$$u \in F^*, \ \alpha \in M_n(F) \rightsquigarrow \langle u \rangle \alpha \in M_n(F)$$

(ii)
$$F^* \times M_{n-1}(F) \longrightarrow M_n(F)$$
$$(u,\alpha) \longmapsto [u]\cdot\alpha$$

функториальны

(iii) $\forall v$ — д.н. F, $\forall$ униформ. π определен

$$\partial_v^\pi : M_*(F) \longrightarrow M_{*-1}(k(v))$$

+ аксиомы:

$\boxed{B0}$ $u, v \in F^*$ $\alpha \in M_n(F)$

$$[uv]\alpha = [u]\alpha + \langle u\rangle [v]\alpha$$

$\boxed{B1}$ A — целостное, гладкое, F — поле вычетов

$\alpha \in M_n(F) \rightsquigarrow$ для почти всех $x \in (\operatorname{Spec} A)^{(1)}$

и $\forall \pi$ униф. $\partial_x^\pi(\alpha) = 0$

$\boxed{B2}$ $\forall$ д.н. v на $F \in \mathcal{F}_k$, π — униформ.

$$\partial_v^\pi([u]\alpha) = [\bar u]\partial_v^\pi(\alpha), \quad \partial_v^\pi(\langle u\rangle\alpha) = \langle \bar u\rangle \partial_v^\pi(\alpha)$$

$$\mathcal{O}_x \longrightarrow k(x)$$

$$\partial_v : M(\mathcal{O}_x) \subset M(F) \longrightarrow M_{*-1}(k(x))$$

$\boxed{B3}$ $E \subset F$, v — д.н. F, $v|_E = w$
с индексом ветвления e

$\pi \in O_v$ — униформ., $\varrho \in O_w$ — униформ.

т.е. $\varrho = u \cdot \pi^e$

$\alpha \in M_*(E)$

Тогда $\partial_v^\pi(\alpha|_F) = e_\varepsilon \langle \bar{u} \rangle \cdot \partial_w^\varrho(\alpha)|_{k(v)}$

$$n_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \langle (-1)^{(i-1)} \rangle$$

$\boxed{HA}$ (i) $0 \longrightarrow M_*(F) \longrightarrow M_*(F(T)) \xrightarrow{\sum \partial_p^p} \bigoplus_{p \in (\mathbb{A}^1_F)^{(1)}} M_{*-1}(F[T]/p) \to 0$

p — неприв. мн-н со ст. коэфф. 1

(ii) $\forall \alpha \in M(F)$

$$\partial_T^T([T]\alpha|_{F(T)}) = \alpha$$

$\boxed{B4}$ X — лок. гладкая размерности 2, $k(X) = F$

z — з. точка

Пусть $y_0 \in X^{(1)}$ $\overline{y_0}$ — smooth $\Rightarrow$

$$M_*(F) / M_*(X) \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(1)} - \{y_0\}} H^1_y(X, M_*)$$

здесь

$$M_*(O_v) = \mathrm{Ker}(\partial_v^\pi : M_*(F) \longrightarrow M_{*-1}(k(v)))$$

$$M_*(X) = \bigcap M_*(O_v)$$

$\boxed{B5}$ X — лок. гладкая, $\dim X = 2$, $k(X) = F$, z — з. точка X

$y_0 \in X^{(1)}$ $\overline{y_0}$ — гладкая π — униформ. в O_{X, y_0}

$\rightarrow \mathrm{Ker}\left(M_*(F) / M_*(X) \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(1)} - y_0} H^1_y(X, M_*) \right)$ совпадает

с $M_{*-1}(O_{\overline{y_0}, z}) \subset M_{*-1}(k(y_0))$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $M_*: F_k \longrightarrow ab_*$, удовл. B1–B5 и HA,

то M_* – неразв. пучок, сильно $\mathbb{A}^1$-инвариантный.

– там строится $s_v: M(\mathcal{O}_v) \longrightarrow M(k(v))$

$$\alpha \longmapsto \partial_v^{\pi}([\pi]\cdot\alpha)$$