30.07.2013

K-теория Милнора–Витта

А. Ананьевский

<u>Опр</u> F — поле $K_*^{MW}(F)$ порождается символами

η (степени -1)

$[u]$ (степени 1) для $u \in F^*$

Соотношения:

1. $[a]\cdot[1-a]=0$
2. $[ab]=[a]+[b]+\eta[a]\cdot[b]$
3. $[u]\eta=\eta[u]$
4. $\eta\cdot h=0$, где $h=\eta\cdot[-1]+2$

$$K_*^{MW}(F)/\eta = K_*^{M}(F)$$

$$K_*^{MW}(F)/h = K_*^{W}(F) \cong I^*(F) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n(F)$$

$$\langle a\rangle = 1+\eta[a] \rightsquigarrow h = 1+\langle -1\rangle$$

$\boxed{\text{Lemma}}$

1. $[ab]=[a]+\langle a\rangle[b]=[a]\langle b\rangle+[b]$
2. $\langle ab\rangle=\langle a\rangle\langle b\rangle$; $K_0^{MW}(F)$ центрально
3. $\langle 1\rangle=1$ $[1]=0$
4. $\langle a\rangle\cdot\langle a^{-1}\rangle=1$
5. $\left[\frac{a}{b}\right]=[a]-\langle a/b\rangle\cdot[b]$

$[a^{-1}]=-\langle a^{-1}\rangle[a]$

$\tau\in\mathcal{O}_X^*$ $\quad T=\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$

$$X\times\mathbb{A}^1\xrightarrow{\cdot\tau}X\times\mathbb{A}^1$$

$$X\wedge T\xrightarrow{\cdot\tau}X\wedge T \qquad \boxed{th/\tau^*th}$$

$\rightsquigarrow \langle\tau\rangle=\Sigma_T^{-1}\tau$ $\quad \pi^{0,0}(pt)$

$\langle\tau\rangle \in [X,X] \quad \Hom_{SH}(\Sigma_T^\infty X,\Sigma_T^\infty X)$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $K_n^{MW}(F)$ порождается символами вида $[\eta^m, u_1, \dots, u_r]$, $m \in \mathbb{N}$, $u_i \in F^*$, $n = r - m$ с соотношениями

1. $[\eta^m, u_1, \dots, u_r] = 0$, если $u_i + u_j = 1$
2. $[\eta^m, \dots, u_{i-1}, ab, u_{i+1}, \dots] =$
$= [\eta^m, \dots, u_{i-1}, a, u_{i+1}, \dots] + [\eta^m, \dots, u_{i-1}, b, u_{i+1}, \dots] +$
$+ [\eta^{m+1}, \dots, u_{i-1}, a, b, u_{i+1}, \dots]$
3. $[\eta^{m+2}, \dots, u_{i-1}, -1, u_{i+1}, \dots] + 2[\eta^{m+1}, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots] = 0$

$\boxed{\text{Lemma}}$ 1. $n \geq 1 \rightsquigarrow K_1^{MW}(F)$ порождается $[u_1] \cdot \ldots \cdot [u_n]$
2. $n \leq 0 \rightsquigarrow K_n^{MW}(F)$ порождается $\eta^{-n} \langle u \rangle$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $K_n^{MW}(F) \xrightarrow{\cdot \eta} K_{n-1}^{MW}(F)$ сюръективно при $n \leq 0$

Еще обозначение: $\varepsilon = -\langle -1 \rangle$ $(\rightsquigarrow \varepsilon \cdot \eta = \eta$

$\boxed{\text{Lemma}}$ 1. $[a] \cdot [-a] = 0$, $\langle a \rangle + \langle -a \rangle = h$
2. $[a][a] = [a][-1] = \varepsilon [a][-1] = [-1][a] = \varepsilon [-1][a]$
3. $[a][b] = \varepsilon [b][a]$
4. $\langle a^2 \rangle = 1$

$GW(F)$ — группа симм. бил. форм

$\langle u \rangle : \quad (x, y) \longmapsto uxy$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $GW(F)$ порождается $\langle u \rangle$ с соотношениями

1. $\langle uv^2 \rangle = \langle u \rangle$
2. $\langle u \rangle + \langle -u \rangle = 1 + \langle -1 \rangle$ нужно только если $\operatorname{char} F = 2$
3. $\langle u \rangle + \langle v \rangle = \langle u + v \rangle + \langle (u+v)uv \rangle$, если $u + v \neq 0$

$$W(F) = GW(F)/_h$$

$$I(F) \hookrightarrow W(F) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

фундаментальный идеал

$$GW(F) \xrightarrow{\varphi_0} K_0^{MW}(F)$$
$$\langle u \rangle \longmapsto \langle u \rangle$$

$$n>0 \rightsquigarrow \varphi_n : W(F) \longrightarrow K_{-n}^{MW}(F)$$

$$\begin{tikzcd}
GW \arrow[r] \arrow[d] & K_0^{MW}(F) \arrow[d, "\cdot \eta^n"] \\
W \arrow[r] & K_{-n}^{MW}(F)
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Lemma}}$ φ_n — изоморфизм $(n \leq 0)$

Док-во $\quad J^n(F) = I^n(F) \times_{I^n/I^{n+1}} K_n^M(F)$

$$J^{-n}(F) := W(F)$$

$\rightsquigarrow J^*(F)$ — град. кольцо

$$\eta \in J^{-1}(F)$$
$$\quad \overset{\shortparallel}{1} \in W(F)$$

$[u] \in J^1(F) = I(F) \times_{..} K_1^M(F)$: $\quad [u] := (\langle u\rangle - 1, [u])$

$\rightsquigarrow$ получаем $\quad K_*^{MW}(F) \longrightarrow J^*(F)$

— это эпиморфизм

$n>0 \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
W(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_{-n}^{MW}(F) \arrow[d] \\
W(F) \arrow[r, equal] & J^{-n}(F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GW(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_0^{MW}(F) \arrow[d] \\
GW \arrow[r, dash] & J^0(F)
\end{tikzcd}$$

$\square$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $K_*^{MW}(F)[\eta^{-1}] = W(F)[\eta,\eta^{-1}]$

$$K_*^{MW}(F) \longrightarrow W(F)[\eta,\eta^{-1}]$$

- есть такое отображение, не инъективное и не сюръективное: $h \longmapsto 0$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} K_*^{MW}(F) \arrow[rr] \arrow[dr] & & W(F)[\eta,\eta^{-1}] \\ & K_*^{W}(F) \arrow[ur, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

① $\operatorname{Im}\psi = I^*(F)$

② $K_*^{W}(F) \simeq I^*(F)$

③ $K_*^{MW}(F) \simeq J^*(F)$

$\boxed{\text{Предложение}}$ $F^* = F^{*2}$

① $K_n^{MW}(F) \cong K_n^{M}(F)$, $n \geq 0$

② $K_n^{MW}(F) = K_n^{W}(F)$, $n < 0$

Док-во прямое вычисление + след. лемма $\square$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $[a^n] = n_\varepsilon \cdot [a]$, где $n_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \langle (-1)^{i-1} \rangle$, $n > 0$,

$n_\varepsilon = -\langle -1 \rangle (-n)_\varepsilon$, $n < 0$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\mathcal{O}_v \subseteq F$, $k(v)$ - поле вычетов. $\exists!$ гомоморфизм (град. групп)

$$\partial_v : K_*^{M}(F) \longrightarrow K_{*-1}^{M}(k(v))$$ π - униформ.

„вычет" $\partial_v(\{\pi\}\{u_2\}\dots\{u_n\}) = \{\bar{u}_2\}\dots\{\bar{u}_n\}$, $u_i \in \mathcal{O}_v^*$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\exists!$ $\partial_v^\pi : K_*^{MW}(F) \longrightarrow K_{*-1}^{MW}(k(v))$:

он уже зависит от π!

① коммутирует с η.

② $\partial_v^\pi([\pi][u_2]\dots[u_n]) = [\bar{u}_2]\cdot\dots\cdot[\bar{u}_n]$

③ $\partial_v^\pi([u_1]\cdot\dots[u_n]) = 0$

Lemma Рассмотрим $K^{MW}_*(k(v))[\xi]/(\xi^2 = \xi\cdot[-1])$ ← степени 1. Отображение

$$\mathbb{Z}\times \mathcal{O}_v^* \simeq F^* \xrightarrow{\Theta_\pi} K^{MW}_*(k(v))[\xi]/(\ldots)$$
$$\pi^n \times u \longmapsto [\bar u] + (n_\varepsilon\langle \bar u\rangle)\cdot\xi$$

индуцирует

$$K^{MW}_*(F) \longrightarrow K^{MW}_*(k(v))[\xi]/(\ldots)$$
$$\eta \longmapsto \eta$$

Опр. $\Theta_\pi(\alpha) = S_v(\alpha) + \underbrace{\partial_v^\pi(\alpha)}\cdot\xi$ ← это и есть вычет!

Предложение ① $\partial_v^\pi([-\pi]\alpha) = \langle -1\rangle_\varepsilon S_v^\pi(\alpha)$

② $\partial_v^\pi([u]\alpha) = -\langle -1\rangle[\bar u]\partial_v^\pi(\alpha)$

③ $\partial_v^\pi(\langle u\rangle\alpha) = \langle \bar u\rangle\,\partial_v^\pi(\alpha)$

$$\mathrm{Spec}(k(v)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v) \hookleftarrow \mathrm{Spec}\,F$$

вычет станет связывающим гомоморфизмом:

$$K^{MW}_*(\mathcal{O}_v) \to K^{MW}_*(F) \xrightarrow{\partial_v} K^{MW}_{*-1}(k(v))$$

Lemma $E \subset F$, v – дискр. норм. на F, e – индекс ветвления

π – униформиз. для v, ϱ – униформиз. для $v|_E$

$\varrho = u\cdot\pi^e$ $\qquad \alpha \in K^{MW}_*(F)$

$$\rightsquigarrow \partial_v^\pi(\alpha|_F) = e_\varepsilon\cdot\langle\bar u\rangle\cdot\left(\partial^\varrho_{v|_E}(\alpha)\right)\Big|_{k(v)}$$

Док-во

$$\begin{array}{ccc} K^{MW}_*(F) & \xrightarrow{\Theta_v} & K^{MW}_*(k(v))[\xi]/(\ldots) \\ \uparrow & & \uparrow \Psi : [a]\mapsto [a|_F],\ \xi \mapsto [\bar u] + e_\varepsilon\langle\bar u\rangle\xi \\ K^{MW}_*(E) & \xrightarrow{\Theta_\varrho} & K^{MW}_*(k(v|_E))[\xi]/(\ldots) \end{array}$$

Опр. $K_n^{MW}(O_v) := \ker \partial_v^{\pi}$

$$K_n^{MW}(F) \Big/ K_n^{MW}(O_v) \cong K_n^{MW}(k(v))$$

не канонически! зависит от выбора униформизующей

одномерные в.п. над F

$$K_*^{MW}(F, L) := K_*^{MW} \otimes_{\mathbb{Z}[F^*]} \mathbb{Z}[L \setminus \{0\}]$$

⇝ есть канонический вычет

$$\partial_v : K_*^{MW}(F) \longrightarrow K_{*-1}^{MW}(k(v), \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)$$

$$[\pi]\cdot[u_2]\cdot\ldots\cdot[u_n] \longmapsto [\bar{u}_2]\cdot\ldots\cdot[\bar{u}_n] \otimes \pi$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $K_*^{MW}(O_v)$ порождается (как кольцо) элементами η и $[u] \in K_1^{MW}(F)$, $u \in O_v^*$

// тогда $K_n^{MW}(O_v)$ порождается $\begin{cases} [u_1]\cdot\ldots\cdot[u_n], & n \geq 1 \\ \eta^n \cdot \langle u \rangle & n \leq 0 \end{cases}$

Д-во: $A_* = \langle \eta, \ldots \rangle$ — ~~подгруппа~~ ~~подкольцо~~, кольцо, порожденное $\langle \eta, \ldots \rangle$

$$Q_* = K_*^{MW}(F) \Big/ A_* \twoheadrightarrow K_*^{MW}(k(v))$$

На Q_* есть структура $K_*^{MW}(k(v))$-модуля

$u \in k(v)$ $\quad u_1 = u_2(1 + \pi\beta)$

$$[u_1] = [u_2(1+\pi\beta)] = [u_2] + [1+\pi\beta] + \eta[u_2][1+\pi\beta]$$

Притом $[1+\pi\beta][a] \in A_*$, если $a \in F^*$

— это какое-то вычисление

сечение $K_*^{MW}(F) \big/ A_* \longleftarrow K_*^{MW}(k(v))$ — это умножение на $[\pi]$

Теорема

$$0 \longrightarrow K_n^{MW}(F) \longrightarrow K_n^{MW}(F(t)) \longrightarrow \bigoplus_p K_{n-1}^{MW}(F[t]/p) \longrightarrow 0$$

$\sum \partial^p_{(p)}$, $\partial_v^{\pi}([t] \cdot \ldots)$

p — неразложимый, ст. коэффициент 1

— расщепимая точная последовательность $K_*^{MW}(F)$-модулей