С. Иванов

$G \curvearrowright H$
$H \curvearrowright G$ $\longrightarrow$ $G \otimes H$ — неабелево тензорное произведение

эти действия должны быть как-то согласованы

если действия тривиальны, то $G \otimes H = G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{ab}$

Важный частный случай: $G \curvearrowright G$ сопряжениями

$\rightsquigarrow St = E \otimes E$

Задача: $\mathrm{Tor}(G, H) = ?$ $\mathcal{H}om(G, H) = ?$

<u>Свойства</u> ① $\mathcal{H}om(G, \mathcal{H}om(H, F)) \simeq \mathcal{H}om(G \otimes H, F)$

② G, H — абелевы, $G \curvearrowright H$ и $H \curvearrowright G$ — тривиальны

$\rightarrow \mathcal{H}om(G, H) = \mathrm{Hom}(G, H)$

③ M — $\mathbb{Z}G$-модуль, $H = M$

$\rightsquigarrow \mathcal{H}om(G, M) = Z^1(G, M)$

Неабелевы H^0 и H^1

(см. Серр, Когомологии Галуа, Гл. 1, §5)

<u>Опр.</u>

① X — G-множество, $G' \leq G$

$x \in X$ — <u>G'-точка X</u>, если $\mathrm{Stab}(x) = G'$

$\{G'\text{-точки}\} \subseteq \mathrm{Hom}_{G\text{-}set}(G/G', X)$

$= \mathrm{Mono}_{G\text{-}set}(G/G', X)$ — мн-во мономорфизмов

x — G-точка $\Leftrightarrow x \in X^G$

$H^0(G, X) = X^G$ = мн-во G-точек X

② H — <u>G-группа</u>, т.е. H — группа и $G \curvearrowright H$ автоморфизмами

$H^0(G, H) \leq H$ — группа G-точек H

$\rightsquigarrow H$ — группа в категории G-множеств

т.е. $H \times H \xrightarrow{mult} H$ — морфизм G-множеств

$\boxed{\text{Пример}}$ $H^0(G, G) = Cent(G)$

3) H — G-группа

$\alpha : G \longrightarrow H$ — скрещенный гомоморфизм, $=$ 1-коцикл

если $\alpha(gg') = \alpha(g) \cdot {}^g\alpha(g')$

$Z^1(G, H)$ = мн-во скрещенных гомоморфизм

$\boxed{\text{Примеры}}$ а) $G \curvearrowright H$ — тривиально, α — гомоморфизм

б) $G \curvearrowright G$ — сопряжением, $a \in G \rightsquigarrow \alpha_a(g) = [a, g]$

$[a, gg'] = [a, g] \cdot {}^g[a, g']$ $\qquad [a,g] = aga^{-1}g^{-1}$

4) $H \curvearrowright Z^1(G, H)$: $\quad h \in H,\ \alpha \in Z^1(G,H)$ $\qquad (h\alpha)(g) = h \cdot \alpha(g) \cdot {}^g h^{-1}$

- $h\alpha$ — скрещенный гомоморфизм
- получили действие H

$(h\alpha)(gg') = h \cdot \alpha(gg') \cdot {}^{gg'}h^{-1} = h \cdot \alpha(g) \cdot {}^g\alpha(g') \cdot {}^{gg'}h^{-1}$

$= \underbrace{h \cdot \alpha(g) \cdot {}^g h^{-1}} \cdot \underbrace{{}^g h \cdot {}^g\alpha(g') \cdot {}^{gg'}h^{-1}} =$

$= (h\alpha)(g) \cdot {}^g(h\alpha)(g')$

$H^1(G, H) = Z^1(G, H)/H$

$\beta = h \cdot \alpha \rightsquigarrow \alpha, \beta$ — когомологичны, $\alpha \sim \beta$

5) Если H абелева, то $Z^1(G, H)$ — абелева группа:

$(\alpha \cdot \beta)(g) = \alpha(g)\beta(g)$

$(\alpha\beta)(gg') = \alpha(gg')\beta(gg') = \alpha(g) \cdot {}^g\alpha(g') \cdot \beta(g) \cdot {}^g\beta(g') =$

$= \alpha(g)\beta(g) \cdot {}^g\alpha(g') \cdot {}^g\beta(g') = (\alpha\beta)(g) \cdot {}^g(\alpha\beta)(g')$

$h \in H \quad \alpha_h = h \cdot *$ $\qquad \alpha_h(g) = h \cdot {}^g h^{-1}$

$$B^1(G,H) = \{\alpha_h \mid h \in H\} \leqslant Z^1(G,H)$$

$$\rightsquigarrow H^1(G,H) = Z^1(G,H) / B^1(G,H) :$$

$h\alpha = \alpha_h \cdot \alpha$, поскольку

$$(h\alpha)g = h \cdot \alpha(g) \cdot {}^g h^{-1} = \alpha_h(g) \cdot \alpha(g)$$

Торсоры над H

$G \curvearrowright H$, X — левое H-G-множество; т.е. $H \curvearrowright X$, $G \curvearrowright X$ и ${}^g(hx) = {}^g h \cdot {}^g x$

Пример $X = H$, H действует сдвигами на себе

H — групповой объект в G-Sets

$\rightsquigarrow X$ — H-объект в G-Sets

т.е. $H \times X \longrightarrow X$ — морфизм G-множеств

Опр. Пусть T — H-G-множество.

T называется торсором, если H действует на T транзитивно и точно, т.е.

$$\forall t \in T \quad \begin{aligned} H &\longrightarrow T \\ h &\longmapsto ht \end{aligned} \quad \text{— изоморфизм } H\text{-множеств.}$$

Теорема {Классы изоморфизма торсоров над H}

$$\cong H^1(G,H)$$

Д-во X — левое H-G-мн-во $\rightsquigarrow$ $xh = h^{-1}x$ задает стр-ру правого H-G-множества

${}^g(xh) = {}^g x \cdot {}^g h$ м. считать, что $T = H$ (как H-мн-в, но действие G другое

т.е. на H есть два действия G: стандартное и пришедшее из торсора $h \longmapsto {}^{g}h$.

при этом

$$g(hh') = g h \cdot {}^{g}h'$$

$$\to g h = g 1 \cdot {}^{g}h$$

Определим 1-коцикл

$$\alpha_T(g) = g 1 \to \alpha_T(g) \cdot {}^{g}\alpha_T(g') = g 1 \cdot {}^{g}(g' 1) =$$
$$= g(g'(1)) = gg' 1 = \alpha_T(gg')$$

Стр-ры торсора на $H \Longleftrightarrow Z^1(G,H)$

$$T \longmapsto \alpha_T$$

$$g h := \alpha(g) \cdot {}^{g}h \longleftarrow\!\shortmid \ \alpha$$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[r, "\cong"] & S & \\ H \arrow[ur, "\cong"] & & & H \arrow[ul, "\cong"'] \\ 1 \arrow[rrr, mapsto, bend left] & & & h^0 \end{tikzcd}$$

$$\to \alpha_T = h^0 \cdot \alpha_S \to \alpha_T \sim \alpha_S$$

и наоборот

Поэтому изоморфизм торсоров $\longleftrightarrow$ когомологичность коциклов

Скручивание

X, Y — H-множества $\rightsquigarrow X \times Y$ с диагональным действием — тоже H-множество

$X \times Y / H =: X \times_H Y$ — множество (если H абелева, то это снова H-мн-во)

похоже на $\otimes$

$(hx, hy) \sim (x, y)$ $\qquad [(x,y)] = xy$ — класс пары (x,y) в $X \times_H Y$

$\Updownarrow$

$(xh, y) \sim (x, hy)$

X, Y — H-G-множества $\Rightarrow X \times_H Y$ — G-множество

T — торсор над $H \rightsquigarrow T \times_H X =: {}_T X$ — скручивание X при помощи торсора T

при этом $\forall t \in T$ $\quad X \longrightarrow {}_T X$ — биекция

$\quad\quad\quad\quad x \longmapsto t_x$

$\alpha \in Z^1(G,H) \rightsquigarrow {}^{(g)}x = \alpha(g)\cdot {}^g x \rightsquigarrow {}_\alpha X \cong {}_{T_\alpha} X$

Если $\alpha \sim \beta$, то ${}_\alpha X \cong {}_\beta X$ — не канонически!

поэтому для $[\alpha] \in H^1(G,H)$ нельзя определить ${}_{[\alpha]}X$

Таким образом, скручивание действует

$$H-G-Sets \longrightarrow G-Sets$$

Если H абелева, то

$$H-G-Sets \longrightarrow H-G-Sets$$

$${}_\alpha T \times_H {}_\beta T = {}_{\alpha\beta} T$$

Биторсоры

X — (H,H) — G — мн-во: $\quad G \curvearrowright X \quad H \curvearrowright X \curvearrowleft H$

$${}^g(hx) = {}^g h \cdot {}^g x$$

$${}^g(hx) = {}^g x \cdot {}^g h \qquad (hx)h' = h(xh')$$

T — <u>биторсор</u>, если это (H,H) — G — множество и

$H \curvearrowright T$, $T \curvearrowleft H$ — транзитивные и точные действия

$t_0 \in T$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\simeq"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & T & H \arrow[l, "\simeq"'] \end{tikzcd} \qquad h t_0 = t_0 \varphi(h)$$

$h \longmapsto h t_0$

$t_0 h \longmapsfrom h$

Покажем, что φ — автоморфизм H!

?

$h h' t_0 = h' t_0 \varphi(h) = t_0 \varphi(h) \varphi(h') = t_0 \varphi(h h')$

точность действия $\Rightarrow \varphi(hh') = \varphi(h)\varphi(h')$

Классы изоморфизма биторсоров — группа

H — абелева группа ⇝ это $H^1(G, H) \rtimes \mathrm{Aut}(H)$

Если T — биторсор, то скручивание — это функтор

$$H - G - \mathrm{Sets} \longrightarrow H - G - \mathrm{Sets}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $H = GL(V)$ $\quad \mathrm{Hom}(V^*, V)$

Сечения для полупрямого произведения

$G \curvearrowright H$ ⇝ есть $H \rtimes G$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook] & H \rtimes G \arrow[r, "p"] & G \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

i — сечение H в $H \rtimes G$

если i — гомоморфизм и $pi = id_G$

сопряжения:

$i'(g) = h \cdot i(g) \cdot h^{-1}$ ⇝ i' — снова сечение

$\boxed{\text{Теорема}}$ Сечения $p \Longleftrightarrow Z^1(G, H)$

сечения p / сопряжения $\Longleftrightarrow H^1(G, H)$

Док-во $\quad i(g) = (\alpha(g), g)$

$$i(gg') = i(g) \cdot i(g') = (\alpha(g), g)(\alpha(g'), g')$$

$$(\alpha(gg'), gg') = (\alpha(g) \cdot {}^g\alpha(g'), gg')$$

Точные последовательности

$H' \leq H$ — G-инвариантная подгруппа ⇝ $H' \rightarrowtail H \twoheadrightarrow H/H'$

$$\rightsquigarrow 1 \longrightarrow H^0(G, H') \longrightarrow H^0(G, H) \longrightarrow H^0(G, H/H') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(G, H') \longrightarrow H^1(G, H)$$

Если $H' \trianglelefteq H$, то эта последовательность продолжается:

$$\left(\longrightarrow H^1(G, H/H')\right)$$

Если $H' \leqslant Z(H)$, то продолжается еще дальше:

$$\left(\longrightarrow H^2(G, H')\right)$$