(18.06.2013)
А. Лавренов

G, H — группы, $G \curvearrowright H$, $H \curvearrowright G$

$$\rightsquigarrow {}^{({}^{h}g)}g' = {}^{h}\left({}^{g}\left({}^{h^{-1}}g'\right)\right)$$

$$ {}^{({}^{g}h)}g' \neq {}^{g}\left({}^{h}\left({}^{g^{-1}}g'\right)\right)$$

если потребовать выполнения этого равенства, действия называются <u>согласованными</u>.

Определим $G \otimes H = \langle \{ g\otimes h \mid g \in G, h \in H\} \mid$ ① $g_1 g_2 \otimes h = ({}^{g_1}g_2 \otimes {}^{g_1}h)(g_1 \otimes h)$, ② $g \otimes h_1 h_2 = (g\otimes h_1)({}^{h_1}g \otimes {}^{h_1}h_2) \rangle$

если действия не согласованные, нужно добавить соотношения

③ $(g\otimes h)(g'\otimes h') = \left({}^{[g,h]}g' \otimes {}^{[g,h]}h'\right)(g \otimes h)$

④ $(g'\otimes h')(g\otimes h) = (g\otimes h)\left({}^{[h,g]}g' \otimes {}^{[h,g]}h'\right)$

Пусть $G \curvearrowright A$, и $A \curvearrowright G$ тривиально

согласованность: $g' = {}^{{}^{g}a}g' = {}^{gag^{-1}}g' = {}^{gg^{-1}}g' = g'$

$${}^{g}a' = {}^{({}^{a}g)}a' = {}^{aga^{-1}}a' =$$

$$= a\,{}^{g}a^{-1} \cdot {}^{g}a' \cdot {}^{g}a \cdot a^{-1}$$

$a' \rightsquigarrow g^{-1}a'$

$\rightsquigarrow a'$ коммутирует с $a \cdot {}^{g}a^{-1}$

т.е. $\{ a \cdot {}^{g}a^{-1} =: [a,g]_A \mid a \in A, g \in G\} \leq Cent(A)$

Теорема A — абелева, $G \curvearrowright A$, $A \curvearrowright G$ тривиально (т.е. A — $\mathbb{Z}[G]$-модуль). Тогда

$$1 \longrightarrow H_1(G,A) \longrightarrow G\otimes A \xrightarrow{\lambda'} A \longrightarrow H_0(G,A) \longrightarrow 1$$

$$g \otimes a \longmapsto {}^{g}a \cdot a^{-1} = ga - a$$

— точная последовательность

$C^n = \mathbb{Z}(G)^{\otimes n} \otimes A$ — комплекс с дифференциалами

$$d_n(g_1 \otimes \dots \otimes g_n \otimes a) = g_2 \otimes \dots \otimes g_n \otimes a + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g_1 \otimes \dots \otimes g_i g_{i+1} \otimes \dots \otimes g_n \otimes a + (-1)^n g_1 \otimes \dots \otimes g_n a$$

В частности,

$$d_1(g_1 \otimes a) = a - g_1 a$$

$$d_2(g_1 \otimes g_2 \otimes a) = g_2 \otimes a - g_1 g_2 \otimes a + g_1 \otimes g_2 a$$

□

$$G \otimes A \cong \frac{C_1(G,A)}{B_1(G,A)}$$

$$g \otimes a \longmapsto g \otimes a$$

Более точно:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(G,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \otimes A \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\wr"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(G,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_1(G,A) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \frac{C_1(G,A)}{B_1(G,A)} \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & A = C_0(G,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(G,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_1(G,A) \arrow[r] & \Delta(G) \otimes A \arrow[r] & A \arrow[r] & H_0(G,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$g \otimes a \mapsto (g-1) \otimes a$$

$$0 \longrightarrow \Delta(G) \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad (\otimes A)$$

$$E(R) \otimes E(R) = St(R)$$

Если G совершенно, то

$$H_2(G) \hookrightarrow G \otimes G \longrightarrow G$$

унив. центральное расширение

Вообще, $G \otimes G / \langle g \otimes g \rangle$

$$H_2(G) \hookrightarrow G \wedge G \longrightarrow [G,G]$$

$$g \wedge h \longmapsto [g,h]$$