25.06.2013
С. Иванов

ПЛАН
- соответствие Дольда — Кана
- монада, комонада
- бар-резольвента относительно комонады, производные функторы относительно комонады
- проективный класс и производные функторы Тирни-Фогеля (Tierney, Vogel) — обобщение Дольда — Пуппе

$\mathcal{C}$ — категория с некоторой доп. структурой
Мы будем рассматривать функторы $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$
(у Тирни-Фогеля $\mathcal{A}$ — абелева категория, у Пирашвили — кат. групп, возможно еще — категория колец)

- Пример: $\mathcal{G}r \longrightarrow \mathcal{A}b$

$$G \longmapsto G_{ab}$$

его производный функтор: $L_n(G)_{ab} = H_n(G)$

- $\mathbb{Z}_\infty : \mathcal{G}r \longrightarrow \mathcal{G}r$ — функтор нильпотентного пополнения:

$$\mathbb{Z}_\infty(G) = \varprojlim G/\gamma_n(G)$$

$$L_i \mathbb{Z}_\infty(GL(R)) = K_i^Q(R)$$

R — кольцо

1. Соответствие Дольда — Кана

Δ — категория: $\mathrm{Ob}\,\Delta = \{[n] \mid n = 0, 1, \dots\}$

$$[n] = \{0 < 1 < \dots < n\} = \{0 \to 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow n\}$$

морфизмы в Δ — монотонные отображения

$\partial^i = \partial^i_{(n)} : [n] \longrightarrow [n+1]$ — пропускает i

$s^i = s^i_{(n)} : [n] \longrightarrow [n-1]$ — попадает в i дважды

— эти морфизмы порождают все морфизмы в Δ.
Между ними есть соотношения; в частности, $\partial^j \partial^i = \partial^i \partial^{j-1}$ для $i < j$

Симплициальный объект в категории $\mathcal{C}$ —

функтор $\Delta^{op} \xrightarrow{X_\bullet} \mathcal{C}$ $\longrightarrow$ достаточно задать $\{X_n\}$ и

$\partial_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$

$s_i : X_n \longrightarrow X_{n+1}$

псевдосимплициальный объект: заданы $\partial_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$

$\shortparallel$

полусимплициальный $=$ (п.с.)

так, что

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \quad \text{для } i<j$$

— можно рассмотреть $\Delta_p \subseteq \Delta$ — подкатегория с теми же объектами, морфизмы Δ_p = инъективные морфизмы Δ

Тогда п.с. объект = функтор $\Delta_p^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория (у нас $\mathcal{A} = R-\mathrm{Mod}$),

X — п.с. объект $\mathcal{A}$

$C(X)$ — ненормализованный комплекс X

— комплекс с $C(X)_n = X_n$, $d = \sum (-1)^i \partial_i$

$\rightarrow$ функторы $C : ps\mathcal{A} \longrightarrow Com_{\geq 0}(\mathcal{A})$

п.с. объекты

$$X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow 0$$

$C : s\mathcal{A} \longrightarrow Com_{\geq 0}(\mathcal{A})$

симплициальные объекты

$N(X)$ — нормализованный комплекс X = комплекс Мура

$$N(X)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker}(\partial_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}), \quad d = \partial_n \big|_{N(X)_n}$$

$\rightarrow$ функторы $N : ps\mathcal{A} \longrightarrow Com_{\geq 0}(\mathcal{A})$

$N : s\mathcal{A} \longrightarrow Com_{\geq 0}(\mathcal{A})$

Пусть X — симплициальный объект, $D(X) \leq C(X)$, — подкомплекс:

$D(X)_n = \sum s_i(X_{n-1})$

$\boxed{\text{Предложение}}$ X — симплициальный объект $\mathcal{A}$. Тогда

① $C(X) = N(X) \oplus D(X)$

② $D(X) \sim 0$

③ $N(X) \sim C(X)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Соответствие Дольда – Кана)

$N: s\mathcal{A} \longrightarrow Com_{\geq 0}(\mathcal{A})$ — эквивалентность категорий

— явно строится обратный функтор $K: Com_{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow s\mathcal{A}$

Пусть X — псевдосимплициальная группа;
комплекс Мура $N(X)$ определяется так же,
и $Im(d^{N(X)}) \triangleleft Ker(d^{N(X)})$

Тогда $H_n(N(X)) = \pi_n(X) = \pi_n(|X|)$

т.е. для $X \in s\mathcal{A}$ имеет смысл рассматривать
$\pi_n(X) = H_n(N(X))$, если 1) $\mathcal{A}$ — абелева
2) $\mathcal{A} = Gr$
3) $\mathcal{A} = Ring$ (?)

2. Монады и комонады

1) Моноид = мн-во M с операцией μ и $1 \in M$
т.ч. ① μ ассоциативна ② $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, т.е.

①
$$\begin{tikzcd}
(M \times M) \times M \arrow[r] \arrow[d, "\mu \times 1"] & M \times (M \times M) \arrow[r, "1 \times \mu"] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[rr, "\mu"'] & & M
\end{tikzcd}$$

② $\eta: * \longrightarrow M$

$$\begin{tikzcd}
* \times M \arrow[r, "\eta \times 1"] \arrow[dr, "\simeq"'] & M \times M \arrow[d] & M \times * \arrow[l, "1 \times \eta"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

2) Пусть $\mathcal{C}$ — категория с конечными произведениями (в частности, в $\mathcal{C}$ есть конечный объект)

Моноид в категории $\mathcal{C}$ — тройка (M, μ, η), где

$$M \in \mathcal{C},\ \mu: M\times M \longrightarrow M,\ \eta: 1 \longrightarrow M,$$

так что выполнены св-ва (1) и (2)

3) $\mathcal{C} = Cat$ → получаем понятие <u>строгой моноидальной</u> <u>категории</u>:

$C \in \mathcal{C}$

$$\mu: \underbrace{C\times C}_{\text{тензорное произведение}} \longrightarrow C \qquad (c, c') \longmapsto c\otimes c'$$

$$\eta: * \longrightarrow C, \qquad \underbrace{\eta(*) = I}_{\text{моноид. единица}}$$

<u>Строгость:</u> $C_1\otimes(C_2\otimes C_3) = (C_1\otimes C_2)\otimes C_3$

$$C\otimes I = I\otimes C = C$$

Если равенства заменить на изоморфизмы (с некоторыми условиями), то получится определение [нестрогой] <u>моноидальной</u> <u>категории</u>

<u>Примеры:</u> $(\mathcal{C}, \times, 1)$ — моноидальная категория

$(Vect_k, \otimes, k)$

$(A\text{-}Bimod, \otimes_A, A)$

$(Top_*, \wedge, S^0)$

$(\underbrace{End(\mathcal{C})}_{\text{категория}}, \circ, Id)$ — <u>строгая</u>

4) Моноид в моноидальной категории:

пусть $\mathcal{C}$ — моноидальная категория

<u>Моноид</u> в $\mathcal{C}$ — тройка (M, μ, η), т.ч.

$\mu: M\otimes M \longrightarrow M$

$\eta: \underbrace{I}_{\text{моноидальная единица}} \longrightarrow M$

+ выполнены аналоги (1) и (2)

Примеры: $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_k \rightsquigarrow$ моноид $=$ асс. k-алгебра с единицей

$\mathcal{C} = \mathrm{hTop} \rightsquigarrow$ моноид $=$ H-моноид

$\mathcal{C} =$ кат. гладких многообразий $\rightsquigarrow$ моноид $=$ моноид Ли

Опр. <u>Монада</u> — моноид в категории $\mathrm{End}(\mathcal{C})$,
$=$ <u>тройка</u>
т.е. монада — тройка (T, μ, η), где

$$T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}, \quad \mu : T^2 \longrightarrow T, \quad \eta : \mathrm{Id} \longrightarrow T$$

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

<u>Комонада</u> — комоноид в $\mathrm{End}(\mathcal{C})$, т.е. тройка

(S, ν, ε): $\quad \nu : S \longrightarrow S^2$ со свойствами, двойственными
$\quad \varepsilon : S \longrightarrow \mathrm{Id}$ свойствам выше.

3. Сопряженные функторы и (ко)монады

$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G \qquad F \dashv G$ — пара сопряженных функторов

$\mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$ — стандартное определение

$\eta : \mathrm{Id} \longrightarrow GF$ — альтернативное определение
— единица
$\varepsilon : FG \longrightarrow \mathrm{Id}$ — коединица
+ аксиомы

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[rr, bend right, "1_F"'] & FGF \arrow[r, "\varepsilon F"] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[rr, bend right, "1_G"'] & GFG \arrow[r, "G\varepsilon"] & G
\end{tikzcd}$$

$$\underset{G\varepsilon F}{\overset{\mu}{\shortparallel}} : GFGF \longrightarrow GF \qquad \underset{F\eta G}{\overset{\nu}{\shortparallel}} : FG \longrightarrow FGFG$$

$\mu = G\varepsilon F$, $\quad \nu = F\eta G$

Предложение (GF, μ, η) — монада, (FG, ν, ε) — комонада

Примеры R — кольцо,

$$\begin{tikzcd} R\text{-}Mod \arrow[d, shift left, "G"] \\ Sets \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

$F(X) = R^{(X)}$

G — забывающий

$T_R(X) = R^{(X)}$ — монада

Оказывается, T_R коммутирует с фильтрующимися копределами. Кольцо R полностью восстанавливается по T_R.

Опр. <u>Обобщенное кольцо</u> — монада на категории множеств, коммутирующая с фильтрующимися копределами

$$\mathbb{F}_1 : Sets \longrightarrow Sets$$ — поле из одного элемента

$$X \longmapsto X \sqcup *$$

$X \sqcup * \sqcup * \longrightarrow X \sqcup *$ задает структуру монады

$$\mu : \mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_1$$

$$\eta_X : X \hookrightarrow X \sqcup *$$

4. Бар-резольвента и производные функторы относительно комонады

$\mathcal{C}$ — категория, S — комонада, $c \in \mathcal{C}$

$Bar_S(c)$ — симплициальный объект $\mathcal{C}$:

$Bar_S(c)_n = S^n(c)$

$S = (S, \nu, \varepsilon)$

$\nu : S \longrightarrow S^2$

$\varepsilon : S \longrightarrow Id$

$$\partial_i : S^n(c) \longrightarrow S^{n-1}(c), \quad \partial_i = S^{i-1}\varepsilon S^{n-i}$$

$$s_i : S^n(c) \longrightarrow S^{n+1}(c), \quad s_i = S^{i-1}\nu S^{n-i}$$

$Bar_S(c)$ называется <u>бар-резольвентой</u> c

Пусть $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ — функтор, где $\mathcal{A}$ абелева или $\mathcal{A} = Gr$

$$L_n^S E(c) = \pi_n(E(Bar_S(c))) = H_n(N(E(Bar_S(c))))$$

Например, A — алгебра над полем k

$$\begin{array}{c} A\text{-Mod} \\ F \uparrow \ \ \downarrow \text{забыв.} \\ \mathrm{Vect} \end{array} \qquad F(V) = A \otimes_k V$$

$\rightsquigarrow$ на A-Mod возникает комонада

$$S_A(M) = A \otimes M$$

$$\nu_M : A \otimes M \longrightarrow A \otimes A \otimes M$$
$$a \otimes m \longmapsto a \otimes 1 \otimes m$$

$$\varepsilon_M : A \otimes M \longrightarrow M$$
$$a \otimes m \longmapsto am$$

$\rightsquigarrow$ $C(\mathrm{Bar}_{S_A}(M)) = \mathrm{Bar}_A(M)$ — обычная бар-резольвента

3. Проективные классы и производные функторы Тирни – Фогеля

$\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ $\quad f : C \longrightarrow C'$ — <u>$\mathcal{P}$-эпиморфизм</u>,

если $\forall X \in \mathcal{P}$ $\quad f_* : \mathcal{C}(X, C) \longrightarrow \mathcal{C}(X, C')$ — сюръекция

$\mathcal{P}$ — <u>проективный класс</u>, если $\forall C \in \mathcal{C}$

$\exists \underset{\mathcal{P}}{\underset{\in}{X}} \longrightarrow C$ — $\mathcal{P}$-эпиморфизм

Объекты из $\mathcal{P}$ называются <u>проективными объектами</u>

$\boxed{\text{Примеры}}$:
- проективные модули в R-Mod
- свободные группы в Gr
- свободные кольца в Ring

$\boxed{\text{Опр.}}$ $X \underset{f_n}{\overset{f_0}{\underset{\vdots}{\longrightarrow}}} Y$ <u>Псевдосимплициальное ядро</u> (п.с. ядро)

$\|$

набор стрелок $K \underset{k_{n+1}}{\overset{k_0}{\underset{\vdots}{\longrightarrow}}} X$

т.ч. $f_i k_j = f_{j-1} k_i$ для $0 \leq i < j \leq n+1$ и <u>универсальный</u> с этим свойством

$\boxed{\text{Предл.}}$ Если в $\mathcal{C}$ есть конечные пределы, то п.с. ядро всегда существует и единственно.

__Док-во__ Пусть сначала $n=0$.

$$K \underset{k_1}{\overset{k_0}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f_0} Y \qquad f_0 k_1 = f_0 k_0$$

Возьмем пулбэк

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k_0"] \arrow[d, "k_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f_0"] \\
X \arrow[r, "f_0"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Пусть теперь $n=1$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, shift left=2, "k_0"] \arrow[r, "k_1" description] \arrow[r, shift right=2, "k_2"'] & X \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
f_0 k_1 &= f_0 k_0\\
f_0 k_2 &= f_1 k_0\\
f_1 k_2 &= f_1 k_1
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
Y & & X \arrow[ll, "f_0"'] \arrow[rr, "f_1"] & & Y \\
& & K \arrow[u, dashed, "k_0"] \arrow[dl, dashed, "k_1"'] \arrow[dr, dashed, "k_2"] & & \\
& X \arrow[uul, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"'] & & X \arrow[uur, "f_0"'] \arrow[dl, "f_1"] & \\
& & Y & &
\end{tikzcd}$$

Случай произвольного n — упражнение $\square$

__аугментированный п.с. объект__

$$\underbrace{\cdots \; X_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_1 \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} X_0}_{\text{п.с. объект}} \xrightarrow{\varepsilon} C$$

т.ч. $\varepsilon\partial_0 = \varepsilon\partial_1$

ведет себя как функтор из категории всех лин. порядков (не обязательно непустых)

пусть $\mathcal{P}$ — проекткласс.

$$\begin{tikzcd}
X_3 \arrow[rr, shift left=3] \arrow[rr, shift left=1] \arrow[rr, shift right=1] \arrow[rr, shift right=3] \arrow[dr, dashed, "e_3"] & & X_2 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dr, dashed, "e_2"] & & X_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, dashed, "e_1"] & & X_0 \arrow[r, "e_0 = \varepsilon"] & C \\
& K_3 \arrow[ur, shift left=3] \arrow[ur, shift left=1] \arrow[ur, shift right=1] \arrow[ur, shift right=3] & & K_2 \arrow[ur, shift left=2] \arrow[ur] \arrow[ur, shift right=2] & & K_1 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & &
\end{tikzcd}$$

$X_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} C$ — __$\mathcal{P}$-точный__, если все e_i — $\mathcal{P}$-эпиморфизмы $(i=0,1,\dots)$

__$\mathcal{P}$-проективная резольвента__ (по Тирни-Фотеко), если он $\mathcal{P}$-точен и $X_i \in \mathcal{P}$

Если есть конечные пределы, то $\mathcal{P}$-проект. резольвента всегда существует

Опр. X, Y — п.с. объекты $\qquad f, g : X \longrightarrow Y$

h — <u>гомотопия</u> между f и g:

$h_i^n : X_n \longrightarrow Y_{n+1}$, $\quad 0 \le i \le n$, причем

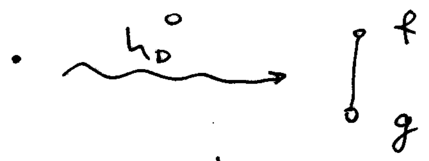
$$\partial_0^{n+1} h_0^n = f_n$$

$$\partial_{n+1}^{n+1} h_n^n = g_n$$

$$\partial_i h_j = \begin{cases} h_{j-1}\partial_i & i<j \\ h_j \partial_{i-1} & i>j+1 \end{cases}$$

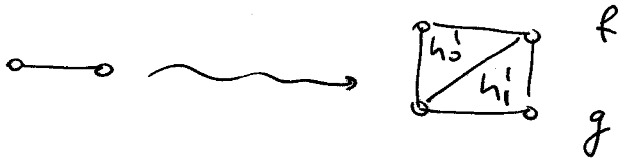
$$\partial_{j+1} h_{j+1} = \partial_{j+1} h_j$$

$n=0 \qquad h_0^0 : X_0 \longrightarrow Y_1$

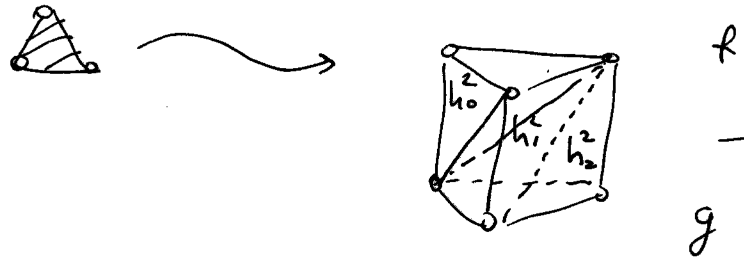


$n=1 \qquad X_1 \overset{h_0^1}{\underset{h_1^1}{\rightrightarrows}} Y_2$

$n=2$



— 2 треугольника



— 3 тетраэдра

Теорема $c, c' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$; $\quad X_\bullet \longrightarrow c,\ Y_\bullet \longrightarrow c$ — $\mathcal{P}$-проект. резольвенты

$f : c \longrightarrow c'$

$\rightsquigarrow \exists\, \bar{f} : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ т.ч.

единственный с точностью до гомотопии

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet & \xrightarrow{\bar f} & Y_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \xrightarrow{f} & c' \end{array}$$

Следствие $\mathcal{P}$-проект. резольвента единственна с точностью до гомотопической эквивалентности

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\mathcal{A}$ — абелева категория; $f, g : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ — гомотопны посредством h ⟶ п.с. объекты

$C(f), C(g) : C(X_\bullet) \longrightarrow C(Y_\bullet)$ гомотопны посредством $C(h)$

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева, $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ — функтор

$\mathcal{P}$ — проект. класс

$L_n^{\mathcal{P}} E(c) = H_n(C(E(X)))$, где X — $\mathcal{P}$-проективная резольвента c

$\|?$

$H_n(N(E(X)))$

производный функтор по Тирни — Фогелю

Что делать для $\mathcal{A} = Gr$?

$$E : \mathcal{C} \longrightarrow Gr$$

$$L_n^{\mathcal{P}} E(c) = H_n(N(E(X)))$$

$\boxed{\text{Примеры}}$ ① $(-)_{ab} : Gr \longrightarrow Ab$ $\mathcal{P}$ = своб. группы

$\leadsto L_n G_{ab} = H_n(G, \mathbb{Z})$

② $Z_\infty : Gr \longrightarrow Gr$ — функтор нильпотентного пополнения

$G \longmapsto G/\gamma_n(G)$ — нижний центральный ряд

$\xleftarrow{\lim}$

$\gamma_n(G) = [G, \gamma_{n-1}(G)]$

$L_n^S Z_\infty(GL(R))$

$\leadsto L_n^{\mathcal{P}} Z_\infty(GL(R)) = K_n^Q(R)$

$L_n Z_\infty(E(\Phi, R)) \overset{?}{=} K_n(\Phi, R)$

$\exists i : S(X) \underset{i}{\overset{\varepsilon_X}{\rightleftarrows}} X \leadsto$ ~~X~~ лежит в $\mathcal{P}_S$

$\varepsilon_X i = id_X$

— так по комонаде S строится проект. класс $\mathcal{P}_S$