02.07.2013

С. Иванов

напоминание и дополнения:

$\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; $\quad c \xrightarrow{f} c'$ — $\mathcal{P}$-эпиморфизм, если

$\forall P \in \mathcal{P}$ $\quad \mathcal{C}(P, c) \xrightarrow{f_*} \mathcal{C}(P, c')$ — сюръекция

$\mathcal{P}$ — проективный класс, если $\forall c \in \mathcal{C}$ $\exists$ $\mathcal{P}$-эпиморфизм $P \longrightarrow c$ такой, что $P \in \mathcal{P}$

Какие бывают резольвенты?

1. $\mathcal{P}$-проективная резольвента в смысле Тирни – Фогеля

$X_\bullet \longrightarrow c$ — дополненный п.с.-объект

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dr, "e_2"'] & & X_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, "e_1"'] & & X_0 \arrow[r] & c \\
& K_2 \arrow[ur, shift left=2] \arrow[ur] \arrow[ur, shift right=2] & & K_1 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & &
\end{tikzcd}$$

$X_i \in \mathcal{P}$, e_i — $\mathcal{P}$-эпиморфизмы

$E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ абелева или $\mathcal{G}r\mathrm{p}$

$\rightsquigarrow L_n^{\mathcal{P}} E(c) = \pi_n(E(X_\bullet))$

2. (S, δ, ε) — комонада $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Bar}_S(c)$ — бар-резольвента

$L_n^S E(c) = \pi_n(E(\mathrm{Bar}_S(c)))$

$\mathcal{P}_S$ — проективный класс, состоящий из

$X \in \mathcal{C} : \exists i \quad X \underset{i}{\overset{\varepsilon_X}{\rightleftarrows}} S(X) \quad \varepsilon_X i = \mathrm{id}_X$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathcal{P}_S$ — проективный класс

Док-во

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, shift left, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "S(f)"'] & X \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed] \\
S(c) \arrow[r, "\varepsilon_c"] & c
\end{tikzcd}$$

$\boxed{S(c) \xrightarrow{\varepsilon_c} c} \longrightarrow$ это $\mathcal{P}$-эпиморфизм

□

$\boxed{\text{Теорема}}$ $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow L_n^S E = L_n^{\mathcal{P}_S} E$

③ $\mathcal{P}$-проективная резольвента Пирашвили:

$$X_\bullet \longrightarrow C \quad \text{— аугмент. п.с.-объект}$$

$X_i \in \mathcal{P}$ и $\forall p \in \mathcal{P}$ $\quad \mathcal{C}(p, X_\bullet) \longrightarrow \mathcal{C}(p, C)$

— гомотопическая экв-сть (т.е., это стягиваемое аугментированное п.с.-множество)

④ Случай $\mathcal{C} = \mathcal{G}r$

свободная симплициальная резольвента:

$$F_\bullet \longrightarrow G \qquad F_i \text{ свободны}$$

группа = постоянная симплиц. группа

гомотопическая экв-сть симплициальных множеств ($\mathcal{P}$ — класс свободных групп)

$$\mathcal{C}(p, X_\bullet) \longrightarrow \mathcal{C}(p, C)$$

— берем $p = \mathbb{Z}$, $X_\bullet = F_\bullet$, $C = G$

$$\to \mathcal{C}(p, X) = Gr(\mathbb{Z}, F_\bullet) = F_\bullet$$

Производные функторы абелианизации

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\quad ab : Gr \longrightarrow \mathcal{A}b$

$$G \longmapsto G_{ab} = G/[G,G]$$

рассм. класс свободных групп (или комонаду „взятие своб. группы")

$$\to L_i\, ab = H_{i+1}(-)$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $A_{\bullet\bullet}$ — бисимплициальная абелева группа

→ есть гомологические спектральные последовательность ${}_IE$, ${}_{II}E$ т.ч.

$${}_IE \Rightarrow ? \Leftarrow {}_{II}E \quad \text{и}$$

по первой комп. по второй комп.

$${}_IE^1_{p,q} = \underbrace{H_q(A_{p\bullet})}_{= \pi_q}, \quad {}_IE^2_{pq} = H^{I}_p(H^{II}_q(A_{\bullet\bullet}))$$

$${}_{II}E^1_{p,q} = H_q(A_{\bullet p}), \quad {}_{II}E^2_{pq} = H^{II}_p(H^{I}_q(A_{\bullet\bullet}))$$

Д-во $C(A_{\cdot\cdot})$ — бикомплекс (см. соответствие Дольда–Кана) □

Рассмотрим две спектральные посл-сти этого бикомплекса.

Д-во Теоремы $F_\cdot \xrightarrow{\sim} G$ — свободная симплиц. резольвента

$\overset{\text{нерв}}{N_\cdot} F_\cdot$ — бисимплициальное мн-во ⇝

$\mathbb{Z}[N_\cdot F_\cdot]$ — бисимплициальная абелева группа

применим лемму: $${}_{I}E^1_{pq} = H_q(\underbrace{\mathbb{Z}[N_p F_\cdot]}_{\wr\ \mathbb{Z}[N_p G]}) = \begin{cases} 0, & q \neq 0 \\ C_p(G), & q = 0 \end{cases}$$

$${}_{I}E^1: \quad C_0(G) \leftarrow C_1(G) \leftarrow C_2(G) \cdots \qquad \rightsquigarrow {}_{I}E^2: \quad H_0(G) \quad H_1(G) \quad H_2(G)$$

$${}_{I}E^2 = {}_{I}E^\infty$$

$$\rightsquigarrow {}_{I}E \Rightarrow H_\bullet(G)$$

$${}_{II}E^1_{pq} = H_q(\mathbb{Z}[N_\cdot F_p]) = H_q(C_\cdot(F_p)) = H_q(F_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ (F_p)_{ab}, & q = 1 \\ 0, & q > 1 \end{cases}$$

$${}_{II}E^1: \quad \begin{array}{l} (F_0)_{ab} \leftarrow (F_1)_{ab} \leftarrow (F_2)_{ab} \leftarrow \cdots \\ \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\pm id} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \cdots \end{array} \qquad \rightsquigarrow {}_{II}E^2: \quad \begin{array}{l} L_0 ab(G) \leftarrow L_1 ab(G) \leftarrow L_2 ab(G) \leftarrow \cdots \\ \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots \end{array}$$

$${}_{II}E \Rightarrow H_\cdot(G)$$

$$\rightsquigarrow H_{i+1}(G) = L_i ab(G)$$ □

Замечание • $\underset{\overset{\|}{E}}{\mathrm{Hom}(G_{ab}, \mathbb{Z})}: Gr \longrightarrow Ab$

$\rightsquigarrow R_n E = H^{n+1}(-)$

• M — аб. группа; Gr_M — категория групп с фикс. действием на M (т.е. M — $\mathbb{Z}G$-модуль)

$Z^1 = \mathrm{Der}: Gr_M \longrightarrow ab$

$G \longmapsto Z^1(G, M) \quad \rightsquigarrow R^i Z^1 = H^{i+1}(-, M)$

2-группы и скрещенные модули

(строгая) <u>2-категория</u>: категория, обогащенная над Cat.

$\forall a, b \in \mathcal{C}$ $\quad \mathcal{C}(a,b)$ — так $\circ_2$ — категория,

$$\mathcal{C}(b,c) \times \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{\circ = \circ_1} \mathcal{C}(a,c) \text{ — функтор}$$

$\boxed{\text{Примеры}}$: ① 2-категория с одним объектом = строгая моноидальная категория: $\otimes = \circ_1$, $\circ = \circ_2$

② Top: $\mathrm{Top}(X,Y)$ — категория, морфизмы = гомотопии / гомотопии гомотопий

③ Cat: $\mathrm{Cat}(\mathcal{C},\mathcal{D}) = \mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$

2-морфизмы = ест. преобразования

<u>2-группоид</u>: все морфизмы обратимы

<u>2-группа</u>: 2-группоид с одним объектом, т.е. моноидальный группоид, на котором $\otimes$ задает структуру группы

Пусть $\mathcal{G}$ — 2-группа; $\pi_1(\mathcal{G}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{G}/\simeq \; = \mathrm{Ob}\,\mathcal{G}/\{\text{объекты, изоморфные } e\}$

$\pi_2(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(e,e)$ — <u>абелева</u> группа
(т.к. есть 2 коммутирующие структуры группы: $\otimes$ и $\circ$)

$\pi_1(\mathcal{G}) \curvearrowright \pi_2(\mathcal{G})$ — сопряжение

$g \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{G}$,
$\alpha \in \pi_2(\mathcal{G})$ $\quad \rightsquigarrow \alpha^g = 1_{g^{-1}} \otimes \alpha \otimes 1_g$

если $g \cong e$, то $\alpha^g = \alpha$: несложно проверить (упражнение)

Скрещенный модуль $C = (\varphi: \underset{\alpha}{G_2} \xrightarrow{\varphi} \underset{g}{G_1},\ G_1 \curvearrowright G_2)$ — правое, автоморфизмами

и (1) $\varphi(\alpha^g) = \varphi(\alpha)^g \quad (= g^{-1}\varphi(\alpha) g)$

(2) $\alpha^{\varphi(\beta)} = \alpha^\beta \quad (= \beta^{-1}\alpha\beta)$

$\boxed{\text{Замечания}}$ ① $Im(\varphi) \trianglelefteq G_1$ $\qquad \pi_1(C) := G_1 / Im(\varphi)$

② $Ker(\varphi) \leqslant Cent(G_2)$ $\qquad \pi_2(C) := Ker\,\varphi$

③ $\pi_1(C) \curvearrowright \pi_2(C)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\quad$ 2-$Gr \underset{\Phi}{\overset{\Psi}{\rightleftarrows}} \simeq$ CrMod $\quad$ сохраняет π_1 и π_2

категория 2-групп $\qquad$ категория скрещ. модулей

$$\Phi(\mathcal{G}) = (\varphi : G_2 \longrightarrow G_1,\ G_1 \curvearrowright G_2)$$

$$G_1 = Ob\,\mathcal{G} \qquad G_2 = \{\alpha : e \longrightarrow g \mid g \in \mathcal{G}\}$$

$$\begin{aligned} \varphi : G_2 &\longrightarrow G_1 \\ \alpha &\longmapsto d^1(\alpha) \end{aligned}$$

конец стрелочки α

$$\begin{tikzcd} & g & \\ e \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\alpha\beta"] \arrow[dr, "\beta"'] & & g\otimes h \\ & h \arrow[ur, "\alpha\otimes 1_h"'] & \end{tikzcd}$$

Действие: $\alpha^g = 1_{g^{-1}} \otimes \alpha \otimes 1_g$

$$H^3(G, M) = \{\text{скрещ. модули} : \pi_1(C) = G,\ \pi_2(C) = M\} / \text{гомотоп. экв-сть}$$