N. Inassaridze, Nonabelian tensor product..., 1996 $\boxed{09.07.2013}$

А. Лавренов

G, H – группы

$$G \longrightarrow \operatorname{Aut} H, \quad H \longrightarrow \operatorname{Aut} G$$

$G \times H \xrightarrow{\Theta} N$ – <u>скрещенно билинейное</u>, если (<u>скрещенное спаривание</u>)

1. $\Theta(gg', h) = \Theta({}^g g', {}^g h) \cdot \Theta(g, h)$
2. $\Theta(g, hh') = \Theta(g, h) \cdot \Theta({}^h g, {}^h h')$
3. $\Theta(g, h) \cdot \Theta(g', h') = \Theta({}^{[g,h]} g', {}^{[g,h]} h') \cdot \Theta(g, h)$
4. $\Theta(g', h') \cdot \Theta(g, h) = \Theta(g, h) \cdot \Theta({}^{[h,g]} g', {}^{[h,g]} h')$

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} \in G * H$$

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G * H \arrow[rr, dashed] & & \operatorname{Aut} G \\ & H \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $G \times G \xrightarrow{[\,,\,]} G$

Для фиксированных G и H инициальный объект в категории таких N называется <u>неабелевым тензорным произведением</u> и обозначается через $G \otimes H$:

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "- \otimes -"] \arrow[dr, "\Theta"'] & G \otimes H \arrow[d, dotted] \\ & N \end{tikzcd}$$

м. считать, что $G \otimes H = \langle \{ g \otimes h \mid g \in G, h \in H \} \mid (1) - (4) \rangle$

Если G, H абелевы и действия тривиальны, получаем обычное тензорное произведение

Пусть A – группа. Рассмотрим категорию $\mathcal{G}r_A$:

<u>Ob</u> – группа G с действиями $A \curvearrowright G$ и $G \curvearrowright A$

<u>морфизмы</u>: $G \xrightarrow{\varphi} G'$: $\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & G' \arrow[d] \\ & \operatorname{Aut} A \end{tikzcd}$ + $\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "a \in A"] & G' \arrow[d, "a \in A"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd}$

Для морфизма $\varphi : G \longrightarrow G'$ в Gr_A определим морфизм $G \otimes A \longrightarrow G' \otimes A$:

достаточно задать
$$\begin{aligned} (G, A) &\longrightarrow G' \otimes A \\ (g, a) &\longmapsto \varphi(g) \otimes a \end{aligned}$$
— скрещенный гомоморфизм

проверим это:

1) $\varphi(gg') \otimes a = \varphi(g)\varphi(g') \otimes a = \Big(\underbrace{{}^{\varphi(g)}\varphi(g')}_{\varphi({}^g g')} \otimes \underbrace{{}^{\varphi(g)}a}_{{}^g a}\Big)(\varphi(g) \otimes a) =$
$= (\varphi({}^g g') \otimes {}^g a)(\varphi(g) \otimes a)$

2) — 4) ...

$\boxed{\text{Замечание}}$

Если $\varphi : G \longrightarrow G'$ — сюръективное отобр-ние, то и $G \otimes A \longrightarrow G' \otimes A$ сюръективно

$\boxed{\text{Утв.}}$ $1 \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} N \longrightarrow 1$ — точна в Gr в Gr_A

$\rightsquigarrow \quad G \otimes A \longrightarrow H \otimes A \longrightarrow N \otimes A \longrightarrow 1$

Д-во: осталось проверить точность в $H \otimes A$

$\mathrm{Im}(f \otimes A) \trianglelefteq H \otimes A$?

$$(h \otimes a)\Big(\prod_i (f(g_i) \otimes a_i)^{\pm 1}\Big)(h \otimes a)^{-1}$$
$$\|$$
$$\prod_i (h \otimes a)(f(g_i) \otimes a_i)^{\pm 1}(h \otimes a)^{-1}$$
$$\| \ (3)$$
$$\prod_i \Big(\underbrace{{}^{[h,a]}f(g_i)}_{f({}^{[h,a]}g_i)} \otimes {}^{[h,a]}a\Big)\underline{(h \otimes a)(h \otimes a)^{-1}} \rightsquigarrow \in \mathrm{Im}(f \otimes A)$$

~~Пусть~~ теперь

$$\begin{tikzcd}
G \otimes A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[rr, bend right] & H \otimes A \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \otimes A \arrow[r] \arrow[d, shift right] & 1 \\
G \otimes A \arrow[r] & H \otimes A \arrow[r] & \mathrm{Coker}(f \otimes A) \arrow[r] \arrow[u, shift right] & 1
\end{tikzcd}$$

$1 \otimes a = 1 \longrightarrow$ композиция тривиальна

эта стрелка есть

Для построения стрелки $N \otimes A \longrightarrow \mathrm{Coker}(f \otimes A)$

построим $(N, A) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f \otimes A)$ — скрещенно билинейное

$$(n, a) \longmapsto [\underbrace{g^{-1}(n)}_{h \,\text{ какой-то прообраз } n} \otimes a]$$

пусть h' — другой прообраз: $g(h') = g(h) = n$

$\rightsquigarrow h' = h \cdot g'$

$$h' \otimes a = h \cdot f(g') \otimes a = \underbrace{\left({}^{h}f(g') \otimes {}^{h}a\right)}_{\mathrm{Im}(f \otimes A)} (h \otimes a)$$

$\square$

$\boxed{\text{Утв.}}$ A — абелева группа, $A \curvearrowleft G$ тривиально, $G \curvearrowright A$

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Тогда $G \otimes A \simeq IG \underset{\mathbb{Z}G}{\otimes} A$

<u>Д-во</u>: 1) $G \otimes A$ абелева

$$(g \otimes a)(g' \otimes a') \overset{(3)}{=\!=} (g' \otimes a')(g \otimes a)$$

строим $\Phi : G \otimes A \longrightarrow IG \underset{\mathbb{Z}G}{\otimes} A$ — для этого построим

скр.-спаривание $(G, A) \xrightarrow{\varphi} IG \underset{\mathbb{Z}G}{\otimes} A$

$$(g, a) \longmapsto (g - 1) \otimes a$$

$$\varphi({}^{g}g', {}^{g}a)\varphi(g, a) = \underbrace{(gg'g^{-1} - 1) \otimes {}^{g}a}_{\substack{\| \\ (gg' - g)g^{-1} \otimes {}^{g}a}} + (g-1) \otimes a =$$

$$= (gg' - 1) \otimes a$$

— — — —

теперь строим

$\Psi : IG \underset{\mathbb{Z}G}{\otimes} A \longrightarrow G \otimes A$, т.е. строим

билинейное $(IG, A) \longrightarrow G \otimes A$

$$\sum (g_i - 1) \otimes a_i \longmapsto \prod (g_i \otimes a_i)$$

Нужно проверить, что оно $\mathbb{Z}G$-билинейно:

$$\psi\Big(\sum (g_i-1)\otimes a_i a_i'\Big) = \prod g_i\otimes a_i a_i' \overset{(2)}{=} \prod (g_i\otimes a_i)(g_i\otimes a_i')$$

— линейность по второму аргументу

$$\sum (g_i-1)h_i\otimes a_i = \sum (g_ih_i-1)\otimes a_i - \sum (h_i-1)\otimes a_i$$

$$\downarrow$$

$$\prod (g_ih_i)\otimes a_i \cdot \prod (h_i\otimes {}^{h_i}a_i)^{-1}$$

$$(h_i\otimes a_i)(h_i^{-1}\otimes a_i) = 1\otimes a_i = 1$$

$$(g_ih_i\otimes a_i)(h_i\otimes {}^{h_i}a_i)^{-1} = (g_ih_i\otimes a_i)(h_i^{-1}\otimes {}^{h_i}a_i) = {}^{h_i}\Big({}^{h_i^{-1}}(g_ih_i\otimes a_i)(h_i^{-1}\otimes a_i)\Big) = {}^{h_i}\big(h_i^{-1}g_ih_i\otimes a_i\big) = g_i\otimes {}^{h_i}a_i$$

$\square$

$$\begin{tikzcd}
 & & & (g-1)\otimes a \arrow[r, mapsto] & (g-1)\otimes a & \\
\dots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & IG\otimes_{\mathbb{Z}G} A \arrow[r] \arrow[dd, shift left] & \mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}G} A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \\
 & 0 & H_1(G,A) & & A \arrow[d, equal] & {}^g a\cdot a^{-1} \arrow[dd, equal] \\
0 \arrow[r] & H_1(G,A) \arrow[r] & & G\otimes A \arrow[uu, shift left] \arrow[r, "\lambda'"] & A & \\
 & & & g\otimes a \arrow[rr, mapsto] & & {}^g a\cdot a^{-1} \\
 & & & & & {[g,a]_A}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть теперь A — любая, $G\in Gr_A$.

Определим
$$H_1(G,A) := \mathrm{Ker}(\lambda')$$
$$H_0(G,A) := \mathrm{Coker}(\lambda')$$
где $\lambda' : g\otimes a \longmapsto {}^g a\cdot a^{-1}$

У нас была категория Gr_A:

морфизмы в ней $G \to G'$ такие:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] \arrow[dr] & & G' \arrow[dl] \\ & \mathrm{Aut}\,A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[d] \\ G \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow A \Rightarrow"] & G' \end{tikzcd}$$

Определим категорию Set_A

Объекты: мн-ва S с действиями $A \xrightarrow{Gr} \mathrm{Bij}\,S$, $S \xrightarrow{Sets} \mathrm{Aut}\,A$

Морфизмы: $S \longrightarrow S'$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr] \arrow[dr, "Sets"'] & & S' \arrow[dl] \\ & \mathrm{Aut}\,A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & S' \arrow[d] \\ S \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow A \Rightarrow"] & S' \end{tikzcd}$$

$Gr_A \xrightarrow{\quad U \quad} Set_A$ — забывающий

построим к нему левый сопряженный

$Set_A \xrightarrow{\quad F \quad} Gr_A$ таким образом

$S \longmapsto Fr(S)$ с действиями:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathrm{Aut}(Fr(S)) \\ a \in A &\longmapsto \big(Fr(S) \longrightarrow Fr(S)\big) \\ & \qquad \big(S \underset{''}{\longrightarrow} Fr(S)\big) \\ & \qquad S \xrightarrow{a} S \xrightarrow[i_S]{} Fr(S) \end{aligned}$$

т.е. $^a(s_1^{\pm1}\ldots s_n^{\pm1}) = {}^a s_1^{\pm1} \cdot \ldots \cdot {}^a s_n^{\pm1}$

$$\begin{aligned} Fr(S) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(A) \\ S &\longrightarrow \mathrm{Aut}(A) \end{aligned}$$

легко

$$(s_1^{\pm1} \ldots s_n^{\pm1})\,a = s_1^{\pm1}(\ldots(s_n^{\pm1} a))$$

для -1 обратные берутся в $\mathrm{Aut}\,A$.

$F \dashv U$

единица: $\mathrm{Id} \xrightarrow{\eta} UF$ коединица: $FU \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Id}$

$S \longmapsto F_r(S)$ $\qquad FU(G) \longmapsto G$

$\rightsquigarrow$ есть комонада на Gr_A

$$\mathfrak{F} = (F, \partial, \varepsilon), \quad \partial = F\eta U$$

проект. класс: $\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}$ $\quad G$ т.ч. $F(G) \xrightarrow{\varepsilon} G$, $\exists i$, $\varepsilon i = 1_G$

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, dashed, "\exists\, a\in A"'] & F(G) \arrow[r, "\varepsilon = \partial_0^0"] \arrow[d, "a\in A"] & G \arrow[d, "a"] \\
K_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F(G) \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ A действует на K_1

$$\begin{tikzcd}
\dots F(K_2) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & F(K_1) \arrow[r, shift left, "\partial_0^1"] \arrow[r, shift right, "\partial_1^1"'] \arrow[d] & F(G) \arrow[d] \\
K_2 \arrow[ur, shift left=2] \arrow[ur] \arrow[ur, shift right=2] & K_1 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & G
\end{tikzcd}$$

— обычная резольвента

$\boxed{\text{Опр.}}$ Действия $G \curvearrowright A$ и $A \curvearrowright G$ согласованы, если

1. ${}^{({}^g a)}g' = {}^{(g a g^{-1})}g'$
2. ${}^{({}^a g)}a' = {}^{(a g a^{-1})}a'$

$\boxed{\text{Замечание}}$

Даже если действия $G \curvearrowright A$ и $A \curvearrowright G$ согласованы, то действия $F_r(G) \curvearrowright A$ и $A \curvearrowright F_r(G)$ не обязаны быть согласованными:

$$G \hookrightarrow F_r(G), \quad g \longmapsto \tilde{g}$$

$$^{{}^g a}\tilde{g'} = \widetilde{{}^{g a g^{-1}} g'} = \widetilde{g \cdot {}^a g^{-1} \cdot {}^a g' \cdot {}^a g\, g^{-1}}$$

$$\neq$$

$$^{g a g^{-1}}\tilde{g'} = \tilde{g}\; \widetilde{{}^a g^{-1}}\; \widetilde{{}^a g'}\; \widetilde{{}^a g}\; \widetilde{g^{-1}}$$

$$F^2(G) \overset{\varepsilon F}{\rightrightarrows} F(G) \longrightarrow G$$

$$(s_1^1 \dots s_1^1) * \dots * (s_m^1 \dots s_m^k)$$

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X_0 \arrow[dr] & \\ & & G \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{\otimes A} \quad X_1 \otimes A \rightrightarrows X_0 \otimes A \longrightarrow 1 \qquad \text{ф-р } Gr_A \xrightarrow{-\otimes A} Gr$$

$$\pi_n(X_\bullet \otimes A) = L_n(-\otimes A)$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $L_0(G \otimes A) \cong G \otimes A$

<u>Д-во</u>

$$\begin{tikzcd} \ker \partial_0^1 \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & F(G) \arrow[r, "\partial_0^0"] & G \arrow[r] & 1 \\ & F(K_1) \arrow[ur, "\partial_1^1"'] & & & \end{tikzcd}$$

$$(\ker \partial_0^1) \otimes A \longrightarrow F(G) \otimes A \longrightarrow G \otimes A \longrightarrow 1$$

Вспомним комплекс Мура:

$$\dots X_2 \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} X_1 \rightrightarrows X_0$$

$$N(X)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker \partial_i^n, \quad d_n = \partial_n^n \big|_{N(X)_n}$$

$$N(X)_1 = \ker \partial_0^1, \quad d_1 = \partial_1^1 \big|_{\ker \partial_0^1}$$

$$\pi_n(X_\bullet) = H_n(N(X)_\bullet)$$

у нас здесь $X_\bullet \otimes A$

$$N(F^*(G)_\bullet \otimes A)_1 = \ker(\partial_0^1 \otimes A)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \ker(\partial_0^1 \otimes A) \arrow[rr, "\partial_1^1 \otimes A"] \arrow[dr, hook] & & F(G)\otimes A \arrow[r, "\partial_0^0 \otimes A"] \arrow[dd, equal] & G \otimes A \arrow[r] & 1 \\ & F^2(G)\otimes A \arrow[ur, "\partial_0^1"'] & & & \\ \ker(\partial_0^1)\otimes A \arrow[uu] \arrow[r, "i\otimes A"] & F^2(G)\otimes A \arrow[r, "\partial_0^1 \otimes A"] & F(G)\otimes A \arrow[r] & G \otimes A \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \xrightarrow{g} G_2 \longrightarrow 1$

$$\rightsquigarrow \dots \to L_{n+1}(G_2 \otimes A) \longrightarrow \pi_n(\ker(F(g)_\bullet \otimes A)) \longrightarrow L_n(G_1 \otimes A) \to \dots$$

Д-во

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & F^2(G) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "F^2(g)"'] & F(G) \arrow[r] \arrow[d, "F(g)"'] & G \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & F^2(G_2) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & F(G_2) \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[d] \\
& 1 & 1 & 1
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{Ker}(F^2(g)\otimes A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(F(g)\otimes A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(g\otimes A) \arrow[d] \\
\arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & F^2(G)\otimes A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "F^2(g)\otimes A"] & F(G)\otimes A \arrow[r] \arrow[d, "F(g)\otimes A"] & G\otimes A \arrow[d, "g\otimes A"] \\
\arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & F^2(G_2)\otimes A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & F(G_2)\otimes A \arrow[r] \arrow[d] & G_2\otimes A \arrow[d] \\
& 1 & 1 & 1
\end{tikzcd}$$

Это симплициальные объекты! $\square$