$\boxed{22.02.2013}$

t-структура

К. Чепуркин

Опр. D — триангулированная категория

Задать t-стр-ру $\Leftrightarrow$ задать подкатегории $D^{\geq 0}$, $D^{\leq 0}$ — строгие, полные:

$D^{\leq n} = D^{\leq 0}[-n]$, $\quad D^{\geq n} = D^{\geq 0}[-n]$

1. $D^{\leq 0} \subset D^{\leq 1}$, $\quad D^{\geq 0} \supset D^{\geq 1}$
2. $X \in D^{\leq 0}$, $Y \in D^{\geq 1}$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Hom}_D(X, Y) = 0$
3. $\forall X \in D \qquad \underset{\overset{\uparrow}{D^{\leq 0}}}{A} \longrightarrow X \longrightarrow \underset{\overset{\uparrow}{D^{\geq 1}}}{B} \longrightarrow A[1]$

Пример: A — абелева, $D(A)$ — производная

$D^{\leq 0}$ состоит из K: $H^i K = 0 \quad \forall i > n$

$D^{\geq 0}$ — — — — — — $i < n$

$$\ldots \to X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \ldots \quad =: X$$

$$\rightsquigarrow \ldots X^{-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \quad =: A$$

$$B := X/A$$

У нас $D^{\geq 0} \cap D^{\leq 0} \underset{H^0}{\cong} A$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$ — абелева категория

$D \xrightarrow{H^0} D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$ — „точный" (гомологический функтор)

Как построить H^0?

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\tau_{\leq n} : D \longrightarrow D^{\leq n}$ — сопряженный справа к вложению

$\tau_{\geq n} : D \longrightarrow D^{\geq n}$ — сопряженный слева

$$\underset{\tau^{\leq 0}X}{\overset{\shortparallel}{A}} \longrightarrow X \longrightarrow \underset{\tau^{\geq 1}X}{\overset{\shortparallel}{B}} \longrightarrow A[1]$$

— так определяется τ на объектах

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A[1] \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & & & \\ A' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & A'[1] \end{array}$$

Применим $\mathrm{Hom}(A, -)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\underset{\le 0}{A}, \underset{\ge 2}{B'[-1]}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(A, A') \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(A, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\underset{\le 0}{A}, \underset{\ge 1}{B'}) \arrow[d, equal] \\
0 & & & 0
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ получили $\begin{matrix} A \\ \downarrow \\ A' \end{matrix}$ – единственное:

аналогично, с помощью $\mathrm{Hom}(-, B')$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[r] \arrow[d] & A[1] \\
A' \arrow[r] & Y \arrow[r] & B' \arrow[r] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ мы построили $\tau_{\le 0}$ и $\tau_{\ge 1}$

сопряженность видно на тот же диаграмме

и треугольники – функториально

$\boxed{\text{Лемма}}$ a) $\tau_{\le n} X = 0 \iff X \xrightarrow{\sim} \tau_{\ge n+1} X$

b) $m \le n \rightsquigarrow$ $\tau_{\le m} X \xrightarrow{\sim} \tau_{\le m} \tau_{\le n} X$

$\tau_{\ge n} X \xrightarrow{\sim} \tau_{\ge n} \tau_{\ge m} X$

c) $m \le n \rightsquigarrow \exists$ естественный изоморфизм

$$\tau_{\ge m} \tau_{\le n} \simeq \tau_{\le n} \tau_{\ge m}$$

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ D^{\le p}}}{A} \longrightarrow X \longrightarrow \underset{\substack{\Uparrow \\ D^{\le p}}}{B} \longrightarrow A[1]$$

$\rightsquigarrow X \in D^{\le p}$

$\rightsquigarrow$ функторы стреляют в одно и то же место;

если $Y \in D^{\le p}$, то

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ D^{\le p}}}{Y} \longrightarrow \tau_{\ge q} Y \longrightarrow (\tau_{\le q-1} Y)[1] \longrightarrow Y[1]$$

$$(\tau_{\le q-1} Y)[1] = \tau_{\le q}(Y[1]) \in D^{\le p}$$

$\Rightarrow \tau_{\ge q} Y \in D^{\le p}$

$\Rightarrow \tau_{\ge q}(D^{\le p}) \subseteq D^{\le p}$

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\le n} X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\ge m} \tau_{\le n} X \arrow[d, dotted] \arrow[dr, dashed] & \\
X \arrow[r] & \tau_{\ge m} X & \tau_{\le n} \tau_{\ge m} X \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

по сопряженности $\tau_{\le n}$

$\rightsquigarrow$ получили $\underset{\text{канонич.}}{\text{морфизм}}$ $\tau_{\ge m} \tau_{\le n} X \longrightarrow \tau_{\le n} \tau_{\ge m} X$

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\ge n+1}[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & X_{\ge n+1}[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & X_{\ge n+1, \ge m}[-1] \arrow[dl, dashed] \\
X_{\le m-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_{\le n} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\ge m, \le n} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\le m-1}[1] \arrow[d, equal] \\
X_{\le m-1} \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & X_{\le m-1}[1] \\
 & X_{\ge n+1} \arrow[r, equal] & X_{\ge n+1} & X' \simeq X_{\ge m}
\end{tikzcd}$$

$\le n \ge m$

$$\begin{tikzcd}
X_{\ge n+1, \ge m}[-1] \arrow[r] & X_{\ge m, \le n} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\ge m} \arrow[r] & X_{\ge n+1, \ge m} \arrow[d] \\
 & \text{это } X_{\le n, \ge m} & & X_{\ge m, \le n}[1]
\end{tikzcd}$$

Теперь можем определить $H^0 := \tau_{\le 0} \circ \tau_{\ge 0}$

$f: X \longrightarrow Y$ $\quad (X, Y \in D^{\ge 0} \cap D^{\le 0} =: D^{=0})$

Как найти конус f?

$=: K[-1]$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & C(f) \ ? \\
\tau_{\le -1} Z \arrow[d] \arrow[ur, dashed] & & & \\
Z[-1] \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & Z \arrow[d] \\
 & & & C := \tau_{\ge 0} Z
\end{tikzcd}$$

Почему $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f)) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$?

$$\begin{tikzcd}
 & K[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & K[-1] \arrow[d] & & \\
Y[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z[-1] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, equal] & \\
Y[-1] \arrow[r] & C[-1] \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] & C \\
 & K \arrow[r, equal] & K & &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow I \simeq \mathrm{Coker}(\ker)$

$\in D^{=0}$

$\Rightarrow I \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{coker})$

$\boxed{\text{Теорема}}$ H^0 — гомологический,

т.е. $\forall$ выделенного $\triangle$ $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$

$$H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(Z)$$ — точная пос-ть

$$H^n := H^0(X[n])$$

Склейка t-структур

$$\mathcal{U} \xhookrightarrow{i} X \xhookleftarrow{j} F$$

$i_! : Sh(\mathcal{U}) \longrightarrow Sh(X)$ — продолжение нулем — точный

$i^! = i^* : DSh(X) \longrightarrow DSh(\mathcal{U})$ — ограничение — точный

$i_* : Sh(\mathcal{U}) \longrightarrow Sh(X)$ — точный слева

$j^* : Sh(X) \longrightarrow Sh(F)$ — точный

$j_! = j_* : Sh(F) \longrightarrow Sh(X)$ — точный

$j^! : DSh(X) \longrightarrow DSh(F)$ — точный слева

Данные склейки: Три категории и шесть функторов

$$D_F \xrightarrow{j_*} D \xrightarrow{i^*} D_{\mathcal{U}}$$

1. $j^* \vdash j_* \vdash j^!$
2. $i_! \vdash i^* \vdash i_*$
3. $i^* j_* = 0$
4. $i_! i^* A \longrightarrow A \longrightarrow j_* j^* A \longrightarrow$

   $j_* j^! A \longrightarrow A \longrightarrow i_* i^* A \longrightarrow$
5. $j^* j_* \cong 1 \cong j^! j_*$

   $i^* i_* \cong 1 \cong i^* i_!$

Замечание $j^* i_! = 0$, и $j^! i_* = 0$

Теорема о склейке

Пусть есть данные склейки

+ t-структуры на D_U и на D_F

→ на D есть t-структура следующего вида:

$$D^{\le 0} = \{ X \in D \mid i^*X \in D_U^{\le 0},\ j^*X \in D_F^{\le 0} \}$$

$$D^{\ge 0} = \{ X \in D \mid i^*X \in D_U^{\ge 0},\ j^!X \in D_F^{\ge 0} \}$$

Док-во (1) легко

(2) $X \in D^{\le 0}$, $Y \in D^{\ge 1}$

$$i_! i^* X \to X \to j_* j^* X \to [1]$$

$$\mathrm{Hom}(j_* j^* X, Y) = \mathrm{Hom}(\underset{\underset{D_F^{\le 0}}{\uparrow}}{j^* X}, \underset{\underset{D_F^{\ge 1}}{\uparrow}}{j^! Y}) = 0$$

(3)

$$\begin{tikzcd}
 & i^*X \arrow[r] & \tau^{\ge 1} i^* X \arrow[d, squiggly] \\
X \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & i_* i^* X \arrow[r] & i_* \tau^{\ge 1} i^* X
\end{tikzcd}$$

$$Y \to X \to i_* \tau^{\ge 1} i^* X \to Y[1]$$

Аналогично,

$$A \to Y \to j_* \tau^{\ge 1} j^* Y \to A[1]$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[d] & \\
i_*\tau^{\ge 1} i^* X[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & \dots[0] \arrow[d, equal] \\
i_*\tau^{\ge 1} i^* X[-1] \arrow[r] & j_*\tau^{\ge 1} j^* Y \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & \dots[0] \\
 & A[1] \arrow[r] & A[1] &
\end{tikzcd}$$

применим i^* к нему

$$0 \to i^* B \to \tau^{\ge 1} i^* X$$

$\to i^* B \in D^{\ge 1}$

Аналогично, $i^* A \cong \tau^{\le 0} i^* X$

Далее применить j^* к вертикальному левому △ и горизонтальному первому △ $\to j^* A \simeq \tau^{\le 0} j^* Y$ $\to j^! B \simeq \tau^{\ge 1} j^* Y$

Невырожденность:

это если $D^{-\infty} := \bigcap\limits_{i\in\mathbb{Z}} D^{\le i} = 0$

$$D^{+\infty} := \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} D^{\ge i} = 0$$

Ограниченность:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} D^{\le i} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} D^{\ge i} = D$$

сердцевина

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "{}^pG"'] & D_1 \arrow[r, "G"] & D_2 \arrow[r, "H_0"] & C_2 \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ D_i, t_i, C_i, $\quad \varepsilon_i : C_i \longrightarrow D_i$

$F: D_1 \longrightarrow D_2$ называется <u>t-точным слева</u>

если $F(D_1^{\ge 0}) \subseteq D_2^{\ge 0}$, и <u>$t$-точным справа</u>,

если $F(D_1^{\le 0}) \subseteq D_2^{\le 0}$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $F: D_1 \longrightarrow D_2$ — t-точен слева $\Rightarrow$ ${}^pF$ — точен слева