

М.В. Сондерс

$$D^b(f.g.ab) \cong k^b(fr, fin.g.ab)$$

$$X \longmapsto RHom(X, \mathbb{Z})$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

(ω) $\uparrow$ — двойственность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

(ω)

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}: 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(-1)} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(0)} \mathbb{Z} \xrightarrow{(1)} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

свободные слагаемые на месте,
а кручение переходит из степени 0
в степень 1.

кручение — полная транзит.
подкатегория

$$Tor D \hookrightarrow D$$

$$D^b(f.g.ab) \xrightarrow{\parallel} D^b(f.Q-Vect)$$

конечномерные
пр-ва над Q

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} Tor_p(D)$$

$$D^*(Mat(T_2(K)))$$

$$supp(s+t) \subseteq supp(s) \cup supp(t)$$

(замкнутое)

Докажем, что это пучок

$$\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq U \quad \{s_i\}_{i \in I}$$

$\sim f^{-1}(U_i)$ образуют
открытое покрытие $f^{-1}(U)$

$$supp(f) \cap f^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} supp(s_i) \cap K$$

Замеч. $\rightarrow$ слева тоже компакт

$f|_A$ — прямой образ собственных точек = исключительный
прямой образ

Тем временем

в топологии (Banach)

$$X - \text{т.п. } Sh X = Sh_{Ab}(X)$$

$$A \in Sh(X), s \in A(X)$$

$$supp(s) = \{x \in X \mid s_x = \lim_{x \in U} s|_U \neq 0\}$$

замкнуто

$$f: X \rightarrow Y - \text{непрерывно}$$

$$U \subseteq Y - \text{открытое}$$

$$A \in Sh(X)$$

$$U \longmapsto \left\{ s \in A(f^{-1}(U)) \mid \begin{array}{l} f|_{supp(s)}: supp(s) \rightarrow U \\ \text{— собственное} \\ \text{отображение} \end{array} \right\}$$

Опр. $f: X \rightarrow Y$ собственное,
если прообраз компакта компактен
(это определение правильное, если
пр-ва локально компактно)

это абелева группа

$$\text{Возьмем } K \subseteq U$$

$$\rightarrow \exists \gamma: |\gamma| < \infty: \bigcup_{j \in \gamma} U_j \supseteq K$$

$$V_i = \bigcup_{j \in \gamma} f^{-1}(U_j) \supseteq f^{-1}(K)$$

$f|_V$ — собственное
(объединение конечного числа
компактов компактно)

Получим пучок

$$f_! : A \longrightarrow f_* A$$

$$f_! - \text{функтор: } A \xrightarrow{\varphi} B \text{ — морфизм пучков} \\ \rightarrow f_! A \xrightarrow{f_! \varphi} f_! B$$

$$s \in A(X) \rightsquigarrow s' \in B(X) \text{ / } x \in X \text{ } \supp(s') \subseteq \supp(s)$$

Кроме того, $f_!$ точен слева:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \text{ — к.т.п. пучков}$$

$$\rightsquigarrow f_! A \longrightarrow f_! B \longrightarrow f_! C$$

можно посчитать производные функторы

$$Rf_! : D^+(Sh X) \longrightarrow D^+(Sh Y)$$

$$H^i(Rf_! A^\bullet) = R^i f_!(A^\bullet) - \text{высшие}$$

исключительные прямые образы

Пример

$$Y \text{ — точка } y = pt$$

$$A \in Sh X$$

$$f_! A = ? = \{pt \longmapsto \{s \in A(X) \mid \supp(s) \text{ компактен}\}\}$$

$$\rightsquigarrow R^i f_!(A^\bullet) = H_c^i(X, A^\bullet) - i\text{-ые гомологии}$$

с компактными носителями

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$(R^i f_!(A^\bullet))_y = (H^i(Rf_! A^\bullet))_y = H^i((Rf_! A^\bullet)_y) = ?$$

Лемма

$$(f_! A)_y \cong A(f^{-1}(y))_c$$

(сечения с компактными носителями)

$$(f_* A)_y \cong A(f^{-1}(y))$$

$$H^i((R(A(f^{-1}(y)))_c)_\bullet)$$

$$\cong H_c^i(f^{-1}(y), A)$$

Пример $i: X \hookrightarrow Y$ — открытое или замкнутое

$$y \in Y \setminus X$$

$$\leadsto (i_! A)_y \cong \bigoplus_{\emptyset} A(i^{-1}(y))_c = 0$$

$$y \in X$$

$$\leadsto (i_! A)_y = A_y$$

$\leadsto i_!$ — расширение нулем:

$$i_! A = A^y$$

В частности, $i_!$ — точный функтор

Заметим, что если f собственн., то $f_! = f_*$ (поскольку слои совпадают)

Например, если i — замкнутое вложение, то $i_! = i_*$

В идеале хотим по $f: X \longrightarrow Y$ построить

$$f^!: Sh(Y) \longrightarrow Sh(X) \quad \text{так, что для } g: Y \longrightarrow Z$$

$$\text{имеем } (gf)^! = f^! g^!$$

$$\text{и } \underline{\text{Hom}}(f_! A, B) \cong f_* \underline{\text{Hom}}(A, f^! B)$$

Но это невозможно!

(продолжение следует)

Слабый Леруе

М.В. Бондарко

P — многообразие над (а.з./полем K , $\text{char } K = p \neq \ell$

$$\text{коэффициенты } \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \leadsto \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \leadsto \mathbb{Z}_\ell \leadsto \mathbb{Q}_\ell$$

Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}_\ell$ или...

P — гладкое проективное размерности d

Аналитический анализ: $P/\mathbb{C}$ + сингулярные коомологии ($\Lambda = \mathbb{Z}$ например)

Z — гиперплоское сечение P

$$\leadsto H^i(P) \longrightarrow H^i(Z) \quad \begin{cases} \text{биекция при } i < d-1 \\ \text{инъекция при } i = d-1 \end{cases}$$

Как это доказывается?

$$Z \xrightarrow{\text{замкн.}} P \hookrightarrow U = P \setminus Z$$

$\leadsto$ есть длинная точная последовательность

$$\begin{array}{c} H_c^i(P) \longrightarrow H_c^i(Z) \longrightarrow H_c^{i+1}(U) \\ \uparrow \\ H_c^i(U) \end{array}$$

U — гладкое алгебраическое многообразие размерности d

Докажем: $H_c^i(U) = 0, i < d$.

Что такое H_c ? $f: X \longrightarrow \operatorname{Spec} K$

$$H_c^i(X) = H^i(Rf_!(\Lambda))$$

(полный исключительный прямой образ

(а обычные когомологии — это для Rf_*)

Обобщенность Вердье

$$Rf_!(\Lambda_X) = Rf_*(\hat{\Lambda}_X)$$

$$\text{точнее, } Rf_!(\Lambda_X) = Rf_*(\underbrace{D_X(\Lambda_X)}_{\parallel \Lambda_X(-d)[-2d]})$$

Поэтому $H_c^i(U) = 0$ при $i < d$



$H^i(U) = 0$ при $i > d$ — а это так, поскольку

$$H^i(A, \mathcal{F}) = 0 \text{ при } i > d$$

(срф)
(лучше разн. d)

$f: X \longrightarrow Y$ — алгебраический морфизм $\sqrt{\text{отн.}}$ размерности $\leq d$

$$\leadsto R^i f_* = 0 \text{ при } i > d$$

Для квазипроективных это неверно! (пример с выкинутым гладким многообразием размерности 2)

$$U \xrightarrow{f} P$$

$$H^i(U) \neq H^i(f^{-1}(Z))$$

$$Z \xrightarrow{i} P$$

в топологической ситуации надо брать ε -окрестности гиперплоскостей: Z_ε

$$\varinjlim_{\varepsilon} H^i(f^{-1}(Z_\varepsilon))$$

Что это в алгебраической геометрии?

Следует $H^i(\mathbb{A}^1 \times_{\mathbb{A}^1} R\Gamma_* \mathcal{L}_U)$

$\mathbb{A}^1 \hookrightarrow X$ — замкнутое погружение с
 ↙ ↘
 расслоение $\mathbb{A}^1$

$$\rightarrow H^{i-2c}(\mathbb{A}^1)(-c) \rightarrow H^i(X) \rightarrow H^i(U) \rightarrow$$

— точная последовательность Лизана
 (двойственная по Вардье к той, которая с H_c выше)