М.В. Бондарко:

$$\begin{tikzcd} & & \operatorname{Spec} K \\ Z \arrow[r, hook, "i"'] & X \arrow[ur, "x"] & U \arrow[l, hook', "j"] \end{tikzcd}$$

$\underset{j^*}{j_! j^!} \to 1_X \to i_* i^*$ $\quad\overset{\Lambda_X}{\rightsquigarrow}\quad$ $j_!\Lambda_U \to \Lambda_X \to i_!\Lambda_Z$

$\underset{i_*}{i_!} i^! \to 1_X \to j_* j^*$

$$\begin{tikzcd} j_!\Lambda_U \arrow[r] & \Lambda_X \arrow[r] \arrow[d, "x_!"] & i_!\Lambda_Z \\ RH_c(U) \arrow[r] & RH_c(X, \Lambda) \arrow[r] & RH_c(Z) \end{tikzcd}$$

Если X, Z — гладкие, Z коразмерности c в X ⟶ $i^!(\Lambda_X) \cong \Lambda_Z(-c)[-2c]$

и получили длинную точную посл-сть Гизина

$RH(Z)(-c)[-2c] \to RH(X, \Lambda) \longrightarrow RH(U)$

i — вложение

$\rightsquigarrow i^*$ точен

А. Лавренов

(продолжение)

X, Y — хаусдорфовы, лок. комп.; $Sh(X) = Sh_{ab}(X)$

$X \xrightarrow{f} Y$ $\qquad f_!A: \ U \longmapsto \{s \in A(f^{-1}(U)) \mid f|_{\operatorname{Supp} s} \text{ — собств.}\}$

$$\begin{tikzcd} Sh X \arrow[r, "F"] \arrow[d] \arrow[dr] & Sh Y \arrow[d] \\ D^+(X) \arrow[r, dashed, "RF"] & D^+(Y) \end{tikzcd}$$
— функтор, точен слева

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\mathcal{Y} \subseteq Ob(Sh X)$ — класс объектов

1) F переводит ацикличные комплексы из $C^+(\mathcal{Y})$ в ацикличные

2) $Sh(X)$ богата объектами из $\mathcal{Y}$

(например, $\mathcal{Y}$ = инъективные объекты)

Как вычислять RF?

$A \in Sh X \quad \rightsquigarrow \quad A \longrightarrow \mathcal{Y}^\bullet$

$RF(A) = F(\mathcal{Y}^\bullet) \in D^+(Y)$

В нашем случае: $f_!$ точен слева

Опр. Пучок $K \in Sh\,X$ называется <u>к-мягким</u> (<u>c-soft</u>), если $K(X) \twoheadrightarrow K(Z)$ $\forall \underset{\text{комп.}}{Z} \subset X$

(например, инъективные пучки к-мягкие)

Можно д-ть, что это — приспособленный класс объектов

Опр. $A \in Sh\,X$ — <u>плоский</u>, если $\forall$ мономорфизма $B \xrightarrow{i} C$ $\quad B \otimes A \xrightarrow{i \otimes 1} C \otimes A$ — тоже мономорфизм

Лемма K — к-мягкий плоский пучок, A — любой; тогда $A \otimes K$ — тоже к-мягкий

Опр. $K \in Sh(X)$ — к-мягкий, плоский

$\underset{\text{открытые}}{U \subseteq V} \subseteq X$ $\qquad (K|_U)^X \longrightarrow (K|_V)^X$ ← расширение 0

$$\downarrow$$

$$f_!((K|_U)^X) \longrightarrow f_!((K|_U)^X)$$

$B \in Sh(Y)$

$$\downarrow$$

$\rightsquigarrow$ $Hom(f_!(K|_V)^X, B) \longrightarrow Hom(f_!(K|_U)^X, B)$

$\rightsquigarrow U \longmapsto Hom(f_!(K|_U)^X, B)$ — предпучок $f^!_K B$

Предложение $A \in Sh\,X$, $B \in Sh\,Y$

$$\rightsquigarrow \underline{Hom}(f_!(A \otimes K), B) \cong f_* \underline{Hom}(A, f^!_K B)$$

Опр. <u>Когомологическая размерность</u> X — наименьшее n т.ч. $H^i_c(X, A) = 0$ $\forall i > n$ $\forall A \in Sh(X)$

Далее везде считаем, что X имеет конечную когомологическую размерность n. Тогда:

Факт $\forall A \in Sh\,X$ $\exists$ ограниченная к-мягкая плоская резольвента.

Опр. $K^\bullet \longrightarrow \mathbb{Z}_X$ — к-мягкая плоская огранич. резольвента

$B^\bullet \in C^+(Y)$ $\qquad f^!_{K^\bullet} B^\bullet : U \longmapsto Hom^\bullet(f_!(K^\bullet|_U)^X, B^\bullet)$

Это не зависит от $K^\bullet$! // см. A. Borel et al. / Intersection Cohomology

$\rightsquigarrow$ положим $f^! B^\bullet = f^!_{K^\bullet} B^\bullet$

Можно проверить, что

$$\underline{Hom}^\bullet(f_!(A^\bullet\otimes K^\bullet), B^\bullet) \cong f_* \underline{Hom}^\bullet(A^\bullet, f^!_{K^\bullet} B^\bullet)$$

Двойственность Вердье

$\boxed{\text{Теорема}}$ $A^\bullet \in D^+(X)$, $B^\bullet \in D^+(Y)$

$$\Rightarrow R\underline{Hom}^\bullet(Rf_! A^\bullet, B^\bullet) \cong Rf_* R\underline{Hom}^\bullet(A^\bullet, f^! B^\bullet)$$

Док-во. $K^\bullet$ — c-мягкая плоская огранич. резольвента $\mathbb{Z}_X$

$I^\bullet$ — инъективная резольвента $B^\bullet$

$$f^! B^\bullet = f^!_{K^\bullet} I^\bullet$$

$$\rightsquigarrow R\underline{Hom}^\bullet(A^\bullet, f^!_{K^\bullet} I^\bullet) = \underline{Hom}^\bullet(A^\bullet, f^!_{K^\bullet} I^\bullet)$$

$$Rf_* R\underline{Hom}^\bullet(A^\bullet, f^! B^\bullet) = f_* Hom^\bullet(A^\bullet, f^!_{K^\bullet} I^\bullet)$$

$A^\bullet \otimes K^\bullet$ — c-мягкая резольвента $A^\bullet$

$$Rf_! A^\bullet = f_!(A^\bullet \otimes K^\bullet)$$

$$\rightsquigarrow RHom^\bullet(Rf_! A^\bullet, B^\bullet) = \underline{Hom}^\bullet(f_!(A^\bullet\otimes K^\bullet), I^\bullet)$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $Hom_{D^+(Y)}(Rf_! A^\bullet, B^\bullet) \cong Hom_{D^+(X)}(A^\bullet, f^! B^\bullet)$

Док-во: $C^\bullet \in D^+(X)$, $E^\bullet \in D^+(X)$

$I^\bullet$ — инъект. резольвента $E^\bullet$

$$\rightsquigarrow \begin{aligned} &Hom_{D^+(X)}(C^\bullet, E^\bullet) \\ &\quad\| \\ &Hom_{D^+(X)}(C^\bullet, I^\bullet) \\ &\quad\| \\ &Hom_{K^+(X)}(C^\bullet, I^\bullet) \\ &\quad\| \\ &H^0\Gamma(X, \underline{Hom}^\bullet(C^\bullet, I^\bullet)) \\ &\quad\| \\ &H^0\Gamma(X, R\underline{Hom}^\bullet(C^\bullet, E^\bullet)) \end{aligned}$$

$$Hom_{D^+(Y)}(Rf_! A^\bullet, B^\bullet) \cong H^0\Gamma(Y, R\underline{Hom}^\bullet(Rf_! A^\bullet, B^\bullet)) \cong$$
$$\cong H^0\Gamma(X, R\underline{Hom}^\bullet(A^\bullet, f^! B^\bullet))$$
$$\cong Hom_{D^+(X)}(A^\bullet, f^! B^\bullet)$$

Функтор двойственности

$$Rf_* \longleftrightarrow Rf_! \qquad f^* \longleftrightarrow f^!$$

$f : X \longrightarrow pt$ $\qquad \mathbb{D}^\bullet_X \in Ob(D^b(X))$:

$\mathbb{D}^\bullet_X = f^! \mathbb{Z}_{pt}$ — дуализирующий комплекс.

$I^\bullet$ — резольвента $\mathbb{Z}_{pt}$

$K^\bullet$

$$U \longmapsto \Gamma(U, f^!_{K^\bullet} I^\bullet)$$
$$\| $$
$$Hom^\bullet(\underbrace{f_!(K^\bullet|_U)^X}, I^\bullet)$$
$$\Gamma_c(X, (K^\bullet|_U)^X)$$
$$\|$$
$$\Gamma_c(U, K^\bullet|_U)$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $A^\bullet \in D^b(X)$

$$D_X A^\bullet = RHom^\bullet(A^\bullet, \mathbb{D}^\bullet_X)$$

— функтор двойственности Бореля — Мура — Вердье

$\Gamma(U, D_X A^\bullet) = ?$

$\boxed{\text{Напоминание}}$

$C^\bullet \in C^b(Ab)$

$P^\bullet$ — комплекс проективных

$$0 \to Ext^1(H^{i+1}(P^\bullet), \mathbb{Z}) \to H^{-i}Hom(P^\bullet, \mathbb{Z}) \to$$
$$\to Hom(H^i P^\bullet, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$$0 \to Ext^1(H^{i+1}(C^\bullet), \mathbb{Z}) \to H^{-i}Hom(C^\bullet, \mathbb{Z}) \to$$
$$\to Hom(H^i C^\bullet, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $A^\bullet \in Ob\, D^b(X)$, $U \subseteq X$ — открыто

$\rightsquigarrow$ есть к.т.п.

$$0 \longrightarrow Ext^1(H^{i+1}_c(U, A), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{H}^{-i}(U, D_X A^\bullet) \to Hom(H^i_c(U, A^\bullet), \mathbb{Z}) \to 0$$

Д-во: $\mathbb{D}^\bullet_X$ — комплекс из инъективных. Тогда

$\underline{Hom^\bullet}(A^\bullet, \mathbb{D}^\bullet_X)$ — вялый

$$\rightsquigarrow H^i(U, D_X A^\bullet) = H^{-i}(\Gamma(U, \underline{Hom}(A^\bullet, \underset{f^!_{K^\bullet} I^\bullet}{D_X}))) =$$

$$\cancel{= H^{-i}(Hom(\Gamma_c(U), A^\bullet \otimes K^\bullet), I^\bullet)}$$

$$= H^{-i}\Gamma(Hom(A^\bullet|_U, (f^!_{K^\bullet} I^\bullet)|_U)) =$$

$$\left(Hom^\bullet(f_!(A^\bullet \otimes K^\bullet), B^\bullet) \cong f_* \underline{Hom^\bullet}(A^\bullet, f^!_{K^\bullet} B^\bullet)\right)$$

$$= H^i(\mathrm{Hom}^\cdot(\Gamma_c(U, A^\cdot \otimes K^\cdot), I^\cdot)) =$$

положим $C^\cdot = \Gamma_c(U, A^\cdot \otimes K^\cdot)$

$\downarrow$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H^{i+1}C^\cdot, \mathbb{Z}) \to H^{-i}R\mathrm{Hom}(C^\cdot, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H^i C^\cdot, \mathbb{Z}) \to 0$$

$$H^i C^\cdot = H^i \Gamma_c(U, A^\cdot \otimes K^\cdot) = \mathcal{H}^i_c(U, A^\cdot)$$

$$H^{-i} R\mathrm{Hom}(C^\cdot, I^\cdot) =$$
$$= H^{-i}(\mathrm{Hom}(\Gamma_c(U, A^\cdot \otimes K^\cdot), I^\cdot)) = \mathcal{H}^{-i}(U, D_X A^\cdot)$$

$$\Gamma(U, D^\cdot_X) = \mathrm{Hom}^\cdot(\Gamma_c(U, K^\cdot), I^\cdot)$$

□

Если коэффициенты не $\mathbb{Z}$, а $\mathbf{k}$ — поле, то Ext никаких нету

$$\to H^{-i}(X, D^\cdot_X A^\cdot) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{H}^i_c(X, A^\cdot), \mathbf{k})$$

$\boxed{\text{Предл.}}$ $f: X \longrightarrow Y$, $A^\cdot \in D^+(X)$, $B^\cdot \in D^+(Y)$

$$\Rightarrow D_Y(Rf_! A^\cdot) \cong Rf_* D_X A^\cdot$$
$$D_X(f^* B^\cdot) \cong f^! D_Y B^\cdot$$

Док-во:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & pt & \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{D}^\cdot_X = h^! \mathbb{Z}_{pt} \cong f^! \underbrace{g^! \mathbb{Z}_{pt}} = f^! \mathbb{D}^\cdot_Y$$

$$\mathbb{D}_Y(Rf_! A^\cdot) = R\mathrm{Hom}^\cdot(Rf_! A^\cdot, \mathbb{D}^\cdot_Y) \cong Rf_*(\underbrace{R\mathrm{Hom}^\cdot(A^\cdot, f^! \mathbb{D}^\cdot_X)}_{\mathbb{D}_X A^\cdot})$$

$$f^! R\mathrm{Hom}^\cdot(B^\cdot, C^\cdot) \cong R\mathrm{Hom}^\cdot(f^* B^\cdot, f^! C^\cdot)$$

$$\mathbb{D}_X(f^* B^\cdot) = R\mathrm{Hom}^\cdot(f^* B^\cdot, D^\cdot_X) \cong R\mathrm{Hom}^\cdot(f^* B^\cdot, f^! \mathbb{D}^\cdot_Y).$$

□

$\boxed{\text{Факт}}$ $\mathbb{D}^\cdot_M \cong \mathcal{O}_M[n]$ $\quad$ $U \mapsto \mathrm{Hom}(H^n_c(U, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

M — n-мерное многообразие связное

$\mathcal{O}_M$ — ориентирующий пучок

$\boxed{\text{Факт}}$ k — поле

$$\Rightarrow \mathcal{H}^{n-i}(M, k) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{H}^i_c(M, k), k)$$