Соответствие Римана–Гильберта

Александр Лузгарев

22 марта 2013

D_X — кольцо (пучок колец) алгебраических дифференциальных операторов на гладком многообразии X. Пример: $X = \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, тогда $D_X = \mathbb{C}\langle x, \partial\rangle/(\partial x - x\partial = 1)$; здесь $\partial = d/dx$, x — умножение на x. В общем случае D_X — это универсальная обертывающая алгебра векторных полей над функциями. На D_X есть фильтрация (степенью операторов), и ассоциированное градуированное кольцо является коммутативным. Это кольцо функций на кокасательном расслоении, поэтому D_X можно считать некоммутативной версией кокасательного расслоения.

1 Теория Галуа

Пусть $L|k$ — расширение полей. Мы будем обозначать через $\mathrm{Aut}(L|k)$ группу автоморфизмов поля L, сохраняющих k. Расширение $L|k$ называется **расширением Галуа**, если $L^{\mathrm{Aut}(L|k)} = k$; в этом случае мы обозначаем $\mathrm{Gal}(L|k) = \mathrm{Aut}(L|k)$ и называем эту группу **группой Галуа** L над k.

Теорема 1 (Основная теорема теории Галуа)**.** *Пусть $L|k$ — конечное расширение Галуа с группой Галуа G. Отображения $M \mapsto \mathrm{Aut}(L|M)$ и $H \mapsto L^H$ устанавливают биекцию между промежуточными полями $L|M|k$ и подгруппами $H \leq G$, обращающую включение. Расширение $M|k$ является расширением Галуа тогда и только тогда, когда соответствующая ему подгруппа H является нормальной. В этом случае $\mathrm{Gal}(M|k) \cong G/H$.*

Теорема 2 (Крулль)**.** *Пусть M — подрасширение в расширении Галуа $L|k$. Тогда $\mathrm{Gal}(L|M)$ является замкнутой подгруппой в $\mathrm{Gal}(L|k)$. Отображения $M \mapsto \mathrm{Gal}(L|M)$ и $H \mapsto L^H$ устанавливают биекцию между промежуточными полями $L|M|k$ и замкнутыми подгруппами $H \leq G$. Подрасширение $M|k$ является расширением Галуа тогда и тольао тогда, когда $\mathrm{Gal}(L|M)$ нормальна в $\mathrm{Gal}(L|k)$. В этом случае $\mathrm{Gal}(M|k) \cong \mathrm{Gal}(L|k)/\mathrm{Gal}(L|M)$.*

Пусть k_s — сепарабельное замыкание поля k; группу Галуа $\mathrm{Gal}(k_s|k)$ мы будем обозначать через $\mathrm{Gal}(k)$. Если L — конечное сепарабельное расширение поля k, то $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ состоит из $[L : k]$ элементов. На этом множестве естественным образом действует группа $\mathrm{Gal}(k)$. Это действие непрерывно и транзитивно, поэтому $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ изоморфно (как $\mathrm{Gal}(k)$-множество) пространству классов смежности $\mathrm{Gal}(k)$ по модулю некоторой открытой подгруппы в $\mathrm{Gal}(k)$. Если $L|k$ — расширение Галуа, то эта подгруппа нормальна.

Теорема 3 (Основная теорема теории Галуа: версия Гротендика)**.** *Пусть k — поле. Функтор, сопоставляющий конечной этальной k-алгебре A множество $\mathrm{Hom}_k(A, k_s)$ устанавливает анти-эквивалентность между категорией конечных этальных k-алгебр и категорией конечных множеств с непрерывным левым действием $\mathrm{Gal}(k)$.*

2 Накрытия

Непрерывное отображение $p\colon Y \to X$ называется **накрытием**, если у каждой точки X есть открытая окрестность V такая, что $p^{-1}(V)$ является несвязным объединением открытых множеств U_i в Y таких, что $p|_{U_i}$ устанавливает гомеоморфизм между U_i и V.

Пусть $p\colon Y \to X$ — связное накрытие. Действие $\mathrm{Aut}(Y|X)$ на Y является вполне несвязным. Рассмотрим фактор-пространство Y по [левому] действию группы $\mathrm{Aut}(Y|X)$. Проекция p раскладывается в композицию непрерывных отображений $Y \to \mathrm{Aut}(Y|X) \setminus Y \to X$. Накрытие называется **накрытием Галуа**, если Y связно и последнее отображение является гомеоморфизмом. Связное накрытие $p\colon Y \to X$ является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(Y|X)$ действует транзитивно на каждом слое отображения p.

Сформулируем аналог основной теоремы теории Галуа (в версии Гротендика) для накрытий. Роль абсолютной группы Галуа будет играть фундаментальная группа базового пространства X. Пусть (X, x) — пространство с отмеченной точкой. Для $y \in p^{-1}(x)$ и элемент $\alpha \in \pi_1(X, x)$ представляется путем $f\colon [0,1] \to X$. Положим $\alpha y = \tilde{f}(1)$, где $\tilde{f}$ — единственное поднятие f до пути в Y с $\tilde{f}(0) = y$. При этом αy не зависит от выбора f и лежит в $p^{-1}(x)$. Мы получили левое действие $\pi_1(X, x)$ на $p^{-1}(x)$. Оно называется **действием монодромии** на слое $p^{-1}(x)$. Определим функтор Fib_x из категории накрытий пространства X в категорию множеств с левым действием группы $\pi_1(X, x)$, сопоставляющий накрытию $p\colon Y \to X$ слой $p^{-1}(x)$.

Теорема 4. *Пусть X — связное и локально односвязное топологическое пространство, $x \in X$. Функтор Fib_x индуцирует эквивалентность между категорией накрытий пространства X и категорией левых $\pi_1(X, x)$-множеств. Связные накрытия соответствуют множествам с транзитивным действием; накрытия Галуа соответствуют множествам классов смежности по нормальным подгруппам.*

На самом деле, функтор Fib_x представим некоторым накрытием $\tilde{X}_x \to X$.

Следствие 5. *Функтор Fib_x индуцирует эквивалентность между категорией конечных накрытий X и категорией конечных множеств с непрерывным левым действием группы $\widehat{\pi_1(X, x)}$ (это проконечное пополнение группы $\pi_1(X, x)$.*

Пусть $p\colon Y \to X$ — пространство над X. Определим предпучок $\mathcal{F}_Y$ множеств на X следующим образом: открытому множеству $U \subseteq X$ сопоставим множество сечений p над U. Ограничения сечений определяются естественным образом. Этот предпучок на самом деле является пучком. Если $p\colon Y \to X$ — накрытие, то пучок $\mathcal{F}_Y$ является локально постоянным. Он постоянен тогда и только тогда, когда это накрытие тривиально. Пучок $\mathcal{F}_Y$ называется **пучком локальных сечений** пространства $p\colon Y \to X$ над X. С помощью композиции сечений сопоставление $Y \mapsto \mathcal{F}_Y$ превращается в функтор.

Теорема 6. *Этот функтор индуцирует эквивалентность между категорией накрытий пространства X и категорией локально постоянных пучков на X.*

Опишем соответствие в обратную сторону. По пучку $\mathcal{F}$ на X построим пространство $p_{\mathcal{F}}\colon X_{\mathcal{F}} \to X$ над X так, что $p_{\mathcal{F}}^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$ для всех $x \in X$. Это просто несвязное объединение всех $\mathcal{F}_x$ по всем $x \in X$ с естественно определенной проекцией. Топология на $X_{\mathcal{F}}$ — самая грубая, в которой образы всех отображений $i_s\colon U \to X_{\mathcal{F}}$, $x \mapsto s|_{\mathcal{F}_x}$ для всех сечений $s \in \mathcal{F}(U)$. Если $\mathcal{F}$ — локально постоянный пучок, то пространство $X_{\mathcal{F}}$ является накрытием пространства X.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть X — связное и локально односвязное топологическое пространство, $x \in X$. Категория локально постоянных пучков множеств на X эквивалентна категории множеств с левым действием группы $\pi_1(X,x)$. Эта эквивалентность индуцирована функтором, отправляющим пучок $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}_x$.*

Теорема 8. *Если, кроме того, R — коммутативное кольцо, то категория локально постоянных пучков R-модулей на X эквивалентна категории левых модулей над групповым кольцом $R[\pi_1(X,x)]$.*

3 Локальные системы

Комплексной локальной системой на X называется локально постоянный пучок конечномерных комплексных векторных пространств. Для связного X все слои имеют одинаковую размерность, которая называется **размерностью** этой локальной системы.

Следствие 9. *Пусть X — связное и локально односвязное топологическое пространство, $x \in X$. Категория комплексных локальных систем на X эквивалентна категории конечномерных векторных левых представлений группы $\pi_1(X,x)$.*

Иными словами, задание локальной системы на X равносильно заданию гомоморфизма $\pi_1(X,x) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ для некоторого n. Этот гомоморфизм называется **представлением монодромии** локальной системы.

Пример 10. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ — связное открытое множество. Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$, где a_i — голоморфные функции на D. Посмотрим на локальные голоморфные решения этого уравнения над открытыми множествами $U \subseteq D$. Они образуют комплексное векторное пространство $\mathcal{S}(U)$. По теореме Коши у каждой точки D есть открытая окрестность U, на которой у пространства $\mathcal{S}(U)$ имеется конечный базис $x_1, \ldots, x_n$. Локальные решения нашего уравнения образуют, таким образом, подпучок $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}^n$. Пучок $\mathcal{S}$ является комплексной локальной системой размерности n.

Аналогично, можно рассмотреть решения системы из n линейных дифференциальных уравнений от n переменных $y' = Ay$, где A — матрица размера $n \times n$ из голоморфных функций, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Как мы знаем, локальная система $\mathcal{S}$ из последнего примера соответствует некоторому n-мерному представлению группы $\pi_1(D,x)$, где $x \in D$. Опишем это представление явно. Пусть элемент $\gamma \in \pi_1(D,x)$ представляется путем $f\colon [0,1] \to D$. Элемента $s \in \mathcal{S}_x$ является ростком голоморфной функции, являющейся решением исходного уравнения. С другой стороны, ему соответствует точка в слое над x накрытия $p_{\mathcal{S}}\colon D_{\mathcal{S}} \to D$, ассоциированного с $\mathcal{S}$. Действие γ на s выглядит так: s отображается в элемент $\tilde{f}(1)$ в слое $p_{\mathcal{S}}^{-1}(x) = \mathcal{S}_x$, где $\tilde{f}$ — единственное поднятие пути f в пространство $D_{\mathcal{S}}$. Иными словами, γs является аналитическом продолжением ростка голоморфной функции s вдоль пути f, представляющего γ.

Пример 11. Пусть D — открытый диск радиуса $1 < R \leq \infty$ с центром в 0 на комплексной плоскости, из которого выкололи точку 0. Возьмем $1 \in D$ в качестве базовой точки фундаментальной группы D. Посмотрим на локальную систему решений дифференциального уравнения первого порядка $y' = fy$, где f — голоморфная функция на D, допускающая мероморфное продолжение в точку 0. Хорошо известно, что решения этого уравнения в некоторой окрестности точки $x \in D$ являются кратными функций вида $\exp \circ F$, где F — первообразная функции f. Поэтому пучок локальных решений является локально постоянным пучком одномерных комплексных векторных пространств. Как мы знаем, первообразная F существует локально, но не глобально на области D. Например, существует первообразная F_- в области $U_- = D \setminus (0, -iR)$, и другая первообразная F_+ в области $U_+ = D \setminus (0, iR)$. Пересечение состоит из двух компонент связности $C_- \subseteq \{z \mid \Re(z) < 0\}$, $C_+ \subseteq \{z \mid \Re(z) > 0\}$. Поскольку F_+ и F_- на каждой компоненте могут лишь отличаться на константу, можно выбрать их так, чтобы $F_- = F_+$ на C_-. Локльная система решений над U_- изоморфна постоянному пучку, соответствующему одномерному подпространство в $\mathcal{O}(U_-)$, натянутому на $\exp \circ F_-$, и аналогично для U_+.

Вычислим представление монодромии $\pi_1(D, 1) \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ этой локальной системы. Мы знаем, что $\pi_1(D, 1) \cong \mathbb{Z}$. Порождающая γ этой группы является классом пути $g\colon [0, 1] \to D$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Одномерное представление $\pi_1(D, 1)$ определяется образом $m \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ элемента γ. Если α — росток голоморфной функции, определенной в окрестности 1, являющейся решением нашего уравнения, то аналитическое продолжение функции α вдоль пути g должно равняться $m\alpha$. Возьмем в качестве α функцию $\exp \circ F_-$. При аналитическом продолжении этой функции вдоль g мы получим $\exp \circ F_+$, поскольку на C_- нам нужно будет поменять F_- на F_+. Поэтому $m = \exp(F_-(1))(\exp(F_+(1)))^{-1} = \exp(F_-(1) - F_-(-1) + F_+(-1) - F_+(1)) = \exp(\int_\gamma f) = \exp(2\pi \operatorname{Res}_0 f)$.

Несложно видеть, что для любого одномерного представления монодромии на диске D можно найти линейное дифференциальное уравнение, локальная система которого имеет данную монодромию: если m — образ γ, можно взять, например, уравнение $y'(z) = \mu z^{-1} y(z)$, где $\mu \in \mathbb{C}$ удовлетворяет равенству $\exp(2\pi i \mu) = m$.

Это можно обобщить на старшие размерности: n-мерное представление проколотого диска D радиуса R определяется образом γ, то есть, матрицей $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Укажем систему из n дифференциальных уравнений $y' = Ay$ с заданным представлением монодромии и коэффициентами, голоморфными в D (имеющими простые полюсы в нуле). Можно взять $A = Bz^{-1}$, где $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — матрица, удовлетворяющая равенству $\exp(2\pi i B) = M$. Ее можно построить, исходя из жордановой формы матрицы M.

4 Соответствие Римана–Гильберта

Мы будем обозначать через Ω^1_D пучок голоморфных 1-форм на D. Для голоморфной функции $f\colon U \to \mathbb{C}$ рассмотрим функцию $df\colon U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(z)$. Сечением Ω^1_D над U тогда называется функция $\omega_u\colon U \to \mathbb{C}$ такая, что у каждой точки $z \in U$ есть открытая окрестность $V \subseteq U$, изоморфная открытому диску в $\mathbb{C}$ с центром в 0 посредством голоморфной функции $g \in \mathcal{O}(V)$ такая, что $\omega_U|_V = f\ dg$ для некоторой $f \in \mathcal{O}(V)$. Получаем пучок $\mathcal{O}$-модулей на D.

Определение 12. Голоморфной связностью на D называется пара $(\mathcal{E}, \nabla)$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на D, а $\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_D$ — морфизм пучков комплексных векторных пространств, удовлетворяющий «тождеству Лейбница»

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

для всех $U \subseteq D$, $f \in \mathcal{O}(U)$, $s \in \mathcal{E}(U)$. Такое ∇ называется **отображением связности**.

Заметим, что чисто формально (во всяком случае, для локально свободного пучка $\mathcal{E}$ модулей конечного ранга над $\mathcal{O}_X$) задание морфизма $\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_D$ эквивалентно заданию морфизма $\Theta_X \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E})$, где Θ_X — пучок векторных полей на X, то есть, двойственный пучок к Ω^1_D: $\Theta_X = \{\theta \in \underline{\mathrm{End}}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X) \mid \theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g), f, g \in \mathcal{O}_X\}$. Поэтому можно считать связностью на $\mathcal{O}_X$-модуле $\mathcal{E}$ морфизм

$$\nabla' \colon \Theta_X \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}), \quad \theta \mapsto \nabla'_\theta,$$

удовлетворяющий свойствам $\nabla'_{f\theta}(s) = f\nabla'_\theta(s)$ и $\nabla'_\theta(fs) = \theta(f)s + f\nabla'_\theta(s)$ для $f \in \mathcal{O}_X$, $\theta \in \Theta_X$, $s \in \mathcal{E}$. Связность, удовлетворяющая дополнительному условию $\nabla_{[\theta_1,\theta_2]}(s) = [\nabla'_{\theta_1}, \nabla'_{\theta_2}](s)$, называется **плоской** (или **интегрируемой**).

Кроме того, задание структуры плоской связности на локально свободном модуле конечного ранга $\mathcal{E}$ эквивалентно заданию структуры левого D_X-модуля на $\mathcal{E}$. Напомним, что пучок D_X определяется как $\mathbb{C}$-подалгебра в $\underline{\mathrm{End}}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$, порожденная $\mathcal{O}_X$ и Θ_X (здесь $\mathcal{O}_X$ отождествляется с подпучком в $\underline{\mathrm{End}}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ посредством отождествления $f \in \mathcal{O}_X$ с эндоморфизмом левого умножения: $g \mapsto fg$). Для связности ∇' положим $\theta s = \nabla'_\theta(s)$; этого достаточно для задания структуры D_X-модуля.

Далее мы ограничимся рассмотрением одномерного случая; при этом любая связность автоматически является плоской. В общем случае необходимо добавить в формулировки ниже требование плоскости.

Пример 13. Пусть $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}^n$ — свободный $\mathcal{O}$-модуль. В этом случае мы можем отождествить сечения $s \in \mathcal{E}(U)$ с наборами $(f_1, \dots, f_n)$ голоморфных функций на U. Можно определить связность на $\mathcal{E}$ посредством отображения $d \colon \mathcal{O}^n \to (\Omega^1_D)^{\oplus n}$, $(f_1, \dots, f_n) \mapsto (df_1, \dots, df_n)$. После этого для любой другой связности ∇ на $\mathcal{O}^r$ нетрудно видеть, что разность $\nabla - d \colon \mathcal{O}^n \to (\Omega^1_D)^{\oplus n}$ удовлетворяет тождеству $(\nabla - d)(fs) = f(\nabla - d)(s)$ для всех $f \in \mathcal{O}(D)$, $s \in \mathcal{E}(D)$. Поэтому $\nabla - d$ задается матрицей $n \times n$ из голоморфных 1-форм. В одномерном случае можно записать каждую 1-форму как $f_{ij}dz$, поэтому $\nabla - d$ имеет вид $[f_{ij}]dz$, где $f_{ij} \in \mathcal{O}(D)$. Легко видеть, что $\nabla(f) = 0$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $y' = -[f_{ij}]y$.

Сечений $s \in \mathcal{E}(U)$ связности $(\mathcal{E}, \nabla)$ называется **горизонтальным**, если $\nabla(s) = 0$. Горизонтальные сечения образуют подпучок $\mathbb{C}$-векторных пространств $\mathcal{E}^\nabla \subseteq \mathcal{E}$.

Лемма 14. *Пучок $\mathcal{E}^\nabla$ является локальной системой размерности, равной рангу $\mathcal{E}$.*

Теорема 15 (Соответствие Римана–Гильберта)**.** *Функтор $(\mathcal{E}, \nabla) \mapsto \mathcal{E}^\nabla$ устанавливает эквивалентность между категорией голоморфных связностей на D и категорией комплексных локальных систем на D.*

Таким образом, каждое конечномерное представление группы $\pi_1(D, x)$ является представлением монодромии некоторой линейной системы голоморфных дифференциальных уравнений.