26.04.2013

Е. Фоляков

$$D(X) = D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \quad , \quad D(K) = \underbrace{D_X(K)}_{\text{двойственность}}$$

Самодвойственная превратная t-структура:

$$B \in {}^pD^{\le 0}(X) \Longleftrightarrow \dim \operatorname{supp}(\mathcal{H}^{-i}B) \le i$$
$$B \in {}^pD^{\ge 0}(X) \Longleftrightarrow \dim \operatorname{supp}(\mathcal{H}^{-i}DB) \le i \qquad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Perv}(X) = {}^pD^{\le 0}(X) \cap {}^pD^{\ge 0}(X)$$

$${}^pH^i : D(X) \longrightarrow \operatorname{Perv}(X)$$

Всякому выделенному треугольнику в $D(X)$ соответствует длинная точная последовательность ${}^pH^i$

Превратная t-структура самодвойственна:

$$B \in {}^pD^{\ge 0}(X) \rightsquigarrow DB \in {}^pD^{\le 0}(X)$$

$x \in X$, $i : \underset{\overline{x}}{\overset{\|}{Y}} \hookrightarrow X$ — замыкание x с приведенной структурой подсхемы

$B \in D(Y)$ — гладкий комплекс над гладкой открытой окрестностью x (гладкие пучки $\approx$ предел локально постоянных) $U \subseteq Y$

$$K_U \cong \overline{\mathbb{Q}_\ell}_U[2d(x)](\underset{\dim(Y)}{\overset{\|}{d(x)}})$$

η — специализация точки x

$$\sim (D_Y(B))_\eta \cong (B_\eta)^\vee [2d(x)](d(x))$$

<u>склейка</u>

Все схемы конечно порождены над алг. полем или конечным

$j: U \hookrightarrow X$, $i : Y \longrightarrow X$ — с приведенной структурой

$T(U) \hookrightarrow D(U)$ — полная триангул. подкатегория

$T(Y) \hookrightarrow D(Y)$

+ условие: $A \in T(U) \Longrightarrow i^* Rj_* A \in T(Y)$

$T^{\le 0}(U)$, $T^{\ge 0}(U)$ — t-структуры

$T^{\le 0}(Y)$, $T^{\ge 0}(Y)$

Мы хотим их склеить, чтобы получить t-структуру на

$$T(X,U) = \{B \in D(X) \mid j^*B \in T(U),\ i^*(B) \in T(Y),\ i^!B \in T(Y)\}$$

полная подкатегория

$$T^{\leq 0}(X,U),\ T^{\geq 0}(X,U)$$

$$B \in T^{\leq 0}(X,U) \iff j^*B \in T^{\leq 0}(U) \text{ и } i^*B \in T^{\leq 0}(Y)$$

$$B \in T^{\geq 0}(X,U) \iff j^*B \in T^{\geq}(U) \text{ и } i^!B \in T^{\geq 0}(Y)$$

$\boxed{\text{Пример}}$ Вырожденная t-структура

$$T(U)^{\geq 1} = 0$$

$\to \dots$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $j: U \hookrightarrow X$ (откр.), $i: Y \longrightarrow X$ (замкн.), $Y = X \setminus U$, $B \in D(X) \rightsquigarrow$

$$B \in {}^pD^{\leq 0}(X) \iff j^*B \in {}^pD^{\leq 0}(U) \text{ и } i^*B \in {}^pD^{\leq 0}(Y)$$

$$B \in {}^pD^{\geq 0}(X) \iff j^!B = j^*B \in {}^pD^{\geq 0}(U),\ i^!B \in {}^pD^{\geq 0}(Y)$$

Докажем, что ${}^pD^{\leq 0}(X)$, ${}^pD^{\geq 0}(X)$ — превратная t-структура

Индукция по размерности

U — открытая сущ. гладкая подсхема в X

$$T(Y) = D(Y)$$

$T(U) \subset D(U)$ — полная подкатегория комплексов с гладкими пучками когомологий

$$T(X,U) = \{E \in D(X) \mid j^*E \text{ имеет гладкие пучки когомологий}\}$$

$\rightsquigarrow$ применим Лемму

Теперь E — комплекс в $D(X)$

$\exists\, U \hookrightarrow X$ — открытая, сущ. гладк.,

т.ч. $E|_U$ имеет гладкие пучки когомологий

$$\to D(X) = \bigcup_{U \subset X} T(X,U)$$

$E \in {}^pD^{\leq 0}$, $E' \in {}^pD^{\geq 1}$ $\to \exists\, U, U'$: $E \in T(X,U)$, $E' \in T(X,U')$

$\underset{U'' = U \cap U'}{\downarrow}$

$\to \mathrm{Hom}(E,E') = 0$

X — алг. многообразие над кон. полем

$K_0 \in D(X)$ — $\underline{\tau\text{-смешанный}}$, если $\mathcal{H}^\nu(K_0)$ — τ-смешанные

Они образуют полную триангулированную подкатегорию

$D_{mixed}(X_0)$

Она стабильна отн-но

$Rf_*, Rf_!, f^*, f^!, \otimes^L, D$

$\boxed{\text{Лемма}}$ X_0 — многообразие над кон. полем

K_0 — τ-смешанный на X_0

$\rightarrow {}^p\tau_{\leq 0} K_0 \in D_{mixed}(X_0)$

$\rightarrow {}^p\tau_{\geq 0} K_0 \in D_{mixed}(X_0)$ $\rightsquigarrow$ есть t-структура на D_{mixed}

$\boxed{\text{Замечание}}$ $K \in D(X) \rightsquigarrow \exists$ стратификация X

$i_\nu \quad Y_\nu \hookrightarrow X_\nu$

т.ч. $i_\nu^* K$, $i_\nu^! K$ — гладкие комплексы на этих подсхемах

$X = \bigsqcup Y_\nu$

замыкание страты = объединение страт

$\mathcal{L}$ полную подкатегорию в $D(X)$ комплексов

L: т.ч. $i_\nu^* L$, $i_\nu^! L$ — гладкие комплексы