03.05.2013

Е. Доржков

$$i_* {}^pH^0(i^!B) \longrightarrow \overline{B} \longrightarrow {}^pH^0(Rj_*j^*\overline{B}) \to i_*{}^pH^1(i^!\overline{B})$$

<u>Промежуточные расширения:</u>

X — к.п. схема над алг. замкнутым или конечным полем

$$\underset{\text{открыто}}{U} \xhookrightarrow{j} X \xhookleftarrow{i} \underset{\text{замкнуто}}{Y} = X \setminus U$$

Опр. Пусть B — превр. пучок на U. Превр. пучок $\overline{B}$ называется <u>расширением</u> B, если $j^*\overline{B} = B$

Лемма $\overline{B}$ — расширение B. Тогда равносильны:

1. $\overline{B}$ не имеет подобъектов и не имеет факторов в $i_*Perv(Y)$
2. ${}^pH^0(i^*\overline{B}) = {}^pH^0(i^!\overline{B}) = 0$
3. $i^*\overline{B} \in {}^pD^{\le -1}(Y)$, $i^!\overline{B} \in {}^pD^{\ge 1}(Y)$

3'. $i^*\overline{B} \in {}^pD^{\le 0}(Y)$, $(i^!\overline{B})[1] \in {}^pD^{\ge 0}(Y)$

4. отображение $i^*\overline{B} \longrightarrow i^*Rj_*B$ изоморфно

$$ad: {}^p\tau_{\le -1}(i^*Rj_*B) \longrightarrow i^*Rj_*B$$

5. двойственно (4): $i^*Rj_*B \longrightarrow i^!\overline{B}[1]$ изоморфно

$$ad: i^*Rj_*B \longrightarrow {}^p\tau_{\ge 0}(i^*Rj_*B)$$

6. $\overline{B} \longrightarrow Rj_*B$ изоморфно

$$ad: \tau^Y_{\le -1}(Rj_*B) \longrightarrow Rj_*B$$

7. если одно из (1)–(6) выполнено, то $\exists$ выделенный Δ $(\overline{B}, Rj_*B, i_*{}^p\tau_{\ge 0}i^*Rj_*B)$

(В формулировке используются выделенные треугольники):

$$i^*\overline{B} \longrightarrow i^*Rj_*B \longrightarrow i^!\overline{B}[1] \longrightarrow$$

и

$$\overline{B} \longrightarrow Rj_*B \longrightarrow i_*i^!\overline{B}[1] \longrightarrow$$

Промежуточное расширение

$\exists!$ (с точностью до квази-изоморфизма) $\overline{B} \in Perv(X)$: т.ч. $\overline{B}$ — расширение B, $\overline{B}$ без факторов и подобъектов из $i_* Perv(Y)$.

Это расширение $\overline{B}$ называется <u>промежуточным расширением</u>.

$j_{!*}B$

$\rightsquigarrow$ получаем функтор

$$j_{!*} : Perv(U) \longrightarrow Perv(X)$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $j' : U' \hookrightarrow U$ — открытая подсхема, $B \in Perv(U')$

Тогда $(j_{!*} \circ j'_{!*})(B) = (j \circ j')_{!*}(B)$

Кроме того, $D(j_{*!}B) = j_{*!}(DB)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $i : Y \longrightarrow X$,

$B \in Perv(U)$ — простой $\rightsquigarrow$ $j_{*!}B \in Perv(X)$ — простой

$\boxed{\text{Теорема}}$ Категория $Perv(X)$ нётерова и артинова

<u>Док-во:</u> $\overline{B} \in Perv(X)$ Нётерова индукция: пусть верно для замкнутых подпр-в меньшей размерности

Выберем $j : U \longrightarrow X$ т.ч. $B = j^*\overline{B} = \mathcal{G}[d]$ для гладкого $\mathcal{G}$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & & \\
 & & & i_* {}^pH^0(i^*Rj_*B) \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & i_* {}^pH^0(i^!\overline{B}) \arrow[r] & \overline{B} \arrow[r] & {}^pH^0(Rj_*B) \arrow[r] \arrow[u] & i_* {}^pH^1(i^!\overline{B}) \arrow[r] & 0 \\
 & & & j_{!*}B \arrow[u] \arrow[ul, bend left] & & \\
 & & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

из Леммы п.(7)

т. пол-сть ограничения

$\boxed{\text{Лемма}}$ $B \in Perv(X)$ – простой $\Leftrightarrow$ он имеет вид $B = i_* j_{!*} \mathcal{G}[d]$

$i: Y \longrightarrow X$ – замкнутая непр. подсхема

$j: U \longrightarrow Y$ – существ. гладкая открытая плотная d-мерная

$\mathcal{G}$ – гладкий неприводимый $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-пучок на U

Продолжаем док-во Теоремы

$\rightarrow$ у B конечная длина на $Perv(U)$

$\rightarrow$ у ${}^pH^0(Rj_*B)$ конечная длина $\square$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $B \in Perv(U)$. Тогда

$$j_{!*}B \cong \mathrm{Image}\left({}^pH^0(Rj_!B) \longrightarrow {}^pH^0(Rj_*B)\right)$$

не имеет факторов в $i_*(Perv(Y))$ — не имеет подобъектов

$$\left(\mathrm{Hom}({}^pH^0(Rj_!B), i_*A) = \mathrm{Hom}(Rj_!B, i_*A)\right)$$

Кроме того,

$$\mathrm{Hom}_{Perv(U)}(A, B) = \mathrm{Hom}_{Perv(X)}(j_{!*}A, j_{!*}B)$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $B \in Perv(U)$

$$\rightarrow {}^pH^\nu(i^* j_{!*}B) \cong {}^pH^\nu(i^* Rj_* B) \quad \forall\ \nu < 0$$

$$\mathcal{H}^{-d}(i_* j_{!*} \mathcal{G}[d]) = i_* j_* \mathcal{G}$$