

$$\ell \neq p \quad q = p^k \quad F = \overline{F_q}$$

24.05.2013

М.В.Бондарю

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow a \\ \text{Spec } F & \longrightarrow & \text{Spec } F_q \end{array} \quad \begin{array}{l} K_0 \text{ — превратный пучок на } X_0 \\ \downarrow \\ K \text{ — на } X \end{array}$$

Fq действует на $\text{Spec } F \leadsto$ действует на X

$$\rightarrow Fr_q^*(F) \cong F \text{ для пучка } F$$

5.1.2 Категория превратных пучков на X_0

вкладывается в категорию превратных пучков над X ,
скал. $Fr_q^* F \cong F$

D-во: применяем $\mathbb{D}$, двойственность Вердье
она коммутрует с заменой базиса:

$$\text{Hom}(K_0, L_0) = H^0 R \text{Hom}(K_0, L_0)$$

$$R \text{Hom}(K_0, L_0) = R \Gamma R a_* R \text{Hom}(K_0, L_0)$$

↑
группы мод. сечений

$$E_2^{pq} = H^p(\text{Spec } Fq, H^q M_0) = H^p(\text{Gal}(F/Fq), H^q M)$$

$$\Rightarrow H^{p+q} R \Gamma M_0$$

тут только 2 коhomологии $\neq 0$

$$E \times_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$$

Если $G = \langle g \rangle$ — циклическая, то

$$\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times(g-1)} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

в насен сужае $\downarrow$ нет $\leadsto$ получим M^G

$$\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times(g-1)} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

все эти с точностью до критич. $g-1$
 $\leadsto$ получим $M/(g-1)M$

1

$$H^0(M) = M^G$$

$$H^1(M) = M_G$$

$$\rightarrow 0 \rightarrow (H^{n-1}M)_G \rightarrow H^n R\Gamma M_0 \rightarrow (H^n M)^G \rightarrow 0$$

$$\rightarrow 0 \rightarrow \text{Hom}^{i-1}(K, L)_G \rightarrow \text{Hom}^i(K_0, L_0) \rightarrow \text{Hom}^i(K, L)^G \rightarrow 0$$

$$H^{-1} \text{ нету} \sim \text{Hom}(K_0, L_0) \simeq \text{Hom}(K, L)^G$$

(5.1.5) $\mathcal{F}_0$ -на X_0 — чисто точечные веса w

$$\Leftrightarrow \forall \text{ з. точки } x \in X_0 \text{ } (\mathcal{F}_x q^n)$$

у действия $\mathcal{F}_x \xrightarrow{F_{q^n}^*} \mathcal{F}_x$ все собств. значения
имеют модуль $(q^n)^{w/2}$ (отсюда можно положить в $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{D}_m^b(X_0, \overline{Q_0})$$

смешанные $\Leftrightarrow \exists$ фильтрация
с чистыми факторами

комплексы, у которых
все подмодули смешанные.

(5.1.7) $\mathcal{OP}_{1/2} \rightsquigarrow t$ -структура на $\mathcal{D}_m^b(X_0, \overline{Q_0})$

(2) Подфактор превратно смешанного пучка — смешанный

Превратные веса: $\leq w \Leftrightarrow \forall i \text{ точечные веса } H^i K \rightarrow \leq w + i$
 $\geq w \Leftrightarrow \mathcal{D}(K) \text{ веса } \leq -w$

$$(\mathcal{D}_{\leq w}^b)[1] = \mathcal{D}_{\leq w+1}^b$$

(5.1.9) — переформулировка в терминах точек

(5.1.14) $\mathcal{D}_S^*, f_L$ переводит $\mathcal{D}_{\leq w}^b$ в $\mathcal{D}_{\leq w}^b$

$f^!, f_*$ сохраняет $\mathcal{D}_{\geq w}^b$

$$(2) (\leq w) \otimes (\leq w') \in (\leq w+w')$$

$$(2^*) R\text{Hom} :$$

$$(3) \mathcal{D} \text{ переставляет } \mathcal{D}_{\leq w} \text{ и } \mathcal{D}_{\geq -w}$$

5.1.15

Пусть $K_0, L_0 \in D_{\text{fin}}^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}e})$

$$K_0 \leq w \quad \text{и} \quad L_0 \geq w$$

$$\rightarrow \textcircled{1} R a_* R \text{Hom}(K_0, L_0) \in D_{\geq 0}^b(\text{Spec}(\mathbb{F}_q))$$

$$\textcircled{2} \text{Hom}^i(K_0, L_0) = 0 \quad \forall i > 0$$

$$\text{Если } K_0 \leq w \text{ и } L_0 \geq w \rightarrow R a_* R \text{Hom}(K, L) \in D^b \geq 0$$

$$\rightarrow \textcircled{3} \text{Hom}^i(K, L)^g = 0 \quad \forall i > 0$$

В частности, если $i > 0$, то

$$\text{Hom}^i(K_0, L_0) \longrightarrow \text{Hom}^i(K, L) \\ \text{— нулевой}$$

f -гладкий $\leadsto f^*$ и $f^!$ сохраняют веса

f -собирв. $\leadsto f_!$ и f_* сохраняют веса

пост. пучок над гладким X_0 — веса 0

$\rightarrow$ прямой образ в точку — вес 0

$\rightarrow H^i$ имеет вес i — это и есть гипотеза Вейля

(5.2.1) F_0 — превр. спеканции над X_0

F_0 -веса $\geq w \Leftrightarrow \forall U_0$ — аффин. эталон над X_0

$H^0(U_0, F)$ — веса $\geq w$

$$O_1^{\leq i} \subset O_1$$

$$O_2^{\leq i} \subset O_2$$

строгое сохранение фильтрации

$$0 \longrightarrow O \longrightarrow O^{\leq i} \longrightarrow 0 \quad \text{— точный комплекс} \\ \forall i$$

(5.3.8.)

(5.4.3.)

(5.4.10)

$$f_0: X_0 \xrightarrow{\quad} Y_0 \quad \text{— проективный}$$

$$H^2(X_0, \mathbb{Q}_e(1)) \sim e^i: {}^p H^{-i} f_* F_0 \rightarrow {}^p H^{-i} f_* F_0(i)$$

(изоморфизм)