Алгебраические группы и мотивы

Часть I
Спецкурс

Список литературы:

- W.C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes.
- T.A. Springer, Linear algebraic groups.
- J.E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory.
- Alexander Merkurjev, Markus Rost, Jean-Pierre Tignol, Max-Albert Knus, The book of involutions.
- Jean-Pierre Serre, Cohomologie galoisienne.

1 Алгебраические группы

20 февраля 2011 г.

На **аффинное многообразие** над полем K можно смотреть с трех сторон.

1. Как на замкнутое в топологии Зариского подмножество $X \subseteq \mathbb{A}^n$.
2. Как на аффинную схему $K[X] := K[X_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n)$ (**координатное кольцо**). Здесь $(f_1, \dots, f_n)$ — конечно порожденный идеал (теорема Гильберта о базисе).
3. Как на **функтор точек**, сопоставляющий коммутативной K-алгебре R множество $\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathcal{A}lg}(A, R)$ («множество решений системы уравнений над R»).

На **групповую схему** над K можно смотреть тоже с трех сторон.

1. Как на аффинное многообразие $X \subseteq \mathbb{A}^n$ с морфизмом $X \times X \xrightarrow{mult} X$, удовлетворяющим аксиомам группы. По морфизму $mult$ определяются также $X \xrightarrow{inv} X$ и $pt \xrightarrow{e} X$.
2. Как на **алгебру Хопфа**, снабженную **коумножением** $K[X] \xrightarrow{\Delta} K[X] \otimes_K K[X]$, индуцированным морфизмом $X \times X \xrightarrow{mult} X$.
3. Как на функтор $R \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathcal{A}lg}(A, R)$ с функториальной структурой группы на всех этих множествах.

Для $x, y \in \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathcal{A}lg}(A, R)$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \times A \xrightarrow{x \otimes y} R \otimes_K R \to R.$$

Пример 1.1. Группа $\mathbb{G}_m$ (т.е. $(K^\times, \cdot)$).

1. Это подмногообразие в K^2, заданное уравнением $x\,y = 1$.
2. Соответствующая алгебра — $A = K[t, t^{-1}]$. $\Delta(t) = t \otimes t$, $s(t) = t^{-1}$.

3. Функтор $R \rightsquigarrow R^\times$.

Пример 1.2. Группа $\mathbb{G}_a$ (т.е. $(K,+)$).

1. Это многообразие K^1.
2. Соответствующая алгебра — $A = K[t]$. $\Delta(t) = t\otimes 1 + 1\otimes t$, $s(t) = -t$.
3. Функтор $R \rightsquigarrow R$.

Пример 1.3. Группа $R^{(1)}_{K(\sqrt{-1})/K}(\mathbb{G}_m)$.

1. Подмногообразие в K^2 задается уравнением $x^2+y^2=1$.
2. Алгебра $K[s,c]$.
   $\Delta(s) = s\otimes c + c\otimes s$, $\Delta(c) = c\otimes c - s\otimes s$.

Если K алгебраически замкнуто, то как групповая схема это изоморфно $\mathbb{G}_m$.

Пример 1.4. Группа GL_n.

1. Уравнение в K^{n^2+1} имеет вид $\det[x_{ij}]\cdot t = 1$.
2. Алгебра — $A = K[x_{ij}, t]/(\det[x_{ij}]\cdot t - 1)$.
   $\Delta(x_{ij}) = \sum x_{ik}\otimes x_{kj}$.
   $\Delta(t) = t\otimes t$.
3. $R \rightsquigarrow \mathrm{GL}_n(R)$, где $\mathrm{GL}_n(R)$ — группа обратимых матриц порядка n.

Пример 1.5. Группа SL_n.

1. Уравнение в K^{n^2} имеет вид $\det[x_{ij}] = 1$.
2. Алгебра — $A = K[x_{ij}, t]/(\det[x_{ij}] - 1)$.
   $\Delta(x_{ij}) = \sum x_{ik}\otimes x_{kj}$.
   SL_n — подгруппа в GL_n. Это значит, что $K[\mathrm{SL}_n]$ — фактор $K[\mathrm{GL}_n]$ по идеалу Хопфа (?).
3. $R \rightsquigarrow \mathrm{GL}_n(R)$, где $\mathrm{GL}_n(R)$ — группа обратимых матриц порядка n.

Пример 1.6. $K[G_1\times G_2] = K[G_1]\otimes_K K[G_2]$.
В частности, $\mathbb{G}_m\times\cdots\times\mathbb{G}_m$ — **расщепимый тор**.

Пример 1.7.

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a\,c = 1 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a' & a\,b' + b\,c' \\ 0 & c\,c' \end{pmatrix}.$$

$\Delta(a) = a\otimes a$, $\Delta(c) = c\otimes c$, $\Delta(b) = a\otimes b + b\otimes c$.
В частности, там содержится подгруппа $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Имеем короткую точную последовательность

$$1 \to \mathbb{G}_a \to G \to \mathbb{G}_m \to 1.$$

2 Функтор Lie

Пусть $G\colon R \rightsquigarrow G(R)$ — функтор точек.

Рассмотрим отображение

$$G(R[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \to G(R), \quad \varepsilon \mapsto 0.$$

Ядро этого отображения — это функтор $\operatorname{Lie} G\colon R \rightsquigarrow (\operatorname{Lie} G)(R)$.

На $(\operatorname{Lie} G)(R)$ возникает коммутативная операция, и это абелева группа.

Теорема 2.1. *Любая аффинная групповая схема над полем — это замкнутая групповая подсхема в* GL_n.

Рассмотрим $\operatorname{Lie} \mathrm{GL}_n$.

$R[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ — это кольцо матриц $X + \varepsilon\, Y$, где $X, Y \in M_n(R)$.

$1 + \varepsilon\, Y$.

Имеем коммутативное умножение

$$(1 + \varepsilon\, Y) \cdot (1 + \varepsilon\, Y') = 1 + \varepsilon\, (Y + Y').$$

$x \in G(R[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$, $y \in G(R[\delta]/(\delta^2))$, оба лежат в $G(R[\varepsilon,\delta]/(\varepsilon^2,\delta^2))$.

$[x, y] = x\, y\, x^{-1}\, y^{-1}$ — это коэффициент при $\varepsilon\, \delta$.

$$(1 + \varepsilon\, X)\,(1 + \varepsilon\, Y)\,(1 - \varepsilon\, X)(1 - \varepsilon\, Y) = 1 + \varepsilon\, \delta\,(X\, Y - Y\, X).$$

$\operatorname{Lie} G$ — это алгебра Ли (скобка $[\cdot,\cdot]$ — это коммутатор).

Пример 2.1. $\operatorname{Lie} \mathrm{SL}_n$ определяется условием $\det(1 + \varepsilon\, X) = 1$, т.е.

$$\operatorname{Lie} \mathrm{SL}_n = \{X \in M_n \mid \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Как устроено умножение на скаляры:

$$\begin{array}{rcl} K[\varepsilon]/(\varepsilon^2) & \to & K[\delta]/(\delta^2), \\ \varepsilon & \mapsto & \alpha\, \delta. \end{array}$$

Пусть $\Gamma \in M_n(K)$ — такая матрица, что $\Gamma^T = \Gamma$ (это будет то, что называется «матрицей Грамма»).

Ортогональная группа есть

$$\mathrm{O}(\Gamma) := \{X \in M_n(K) \mid X^T\, \Gamma\, X = \Gamma\}.$$

В частности, если Γ — единичная матрица, то получается обычная ортогональная группа.

Посчитаем $\operatorname{Lie} \mathrm{O}(\Gamma)$.

$$(1 + \varepsilon\, X)^T\, \Gamma (1 + \varepsilon\, X) = \Gamma,$$
$$\Gamma + \varepsilon\,(X^T\, \Gamma + \Gamma\, X) = \Gamma.$$

Уравнение для алгебры — $X^T\, \Gamma + \Gamma\, X = 0$.

Пример 2.2. $\mu_n = \{x^n = 1\}$.

$A = K[t]/(t^n - 1)$, $\Delta(t) = t \otimes t$.

$\mu_n \hookrightarrow \mathbb{G}_m = \mathrm{GL}_1$.

$(1 + \varepsilon\, X)^n = 1$. Уравнение для алгебры — $n\, X = 0$.

- Если $\operatorname{char} K$ не делит n, то $\operatorname{Lie} \mu_n = 0$.
- Если $\operatorname{char} K$ делит n, то $\operatorname{Lie} \mu_n = K$.

Теорема 2.2. *Аффинная групповая схема над K является гладкой как аффинная схема iff*

$$\dim \operatorname{Lie} G = \dim G$$

(слева стоит размерность векторного пространства, а справа — размерность многообразия).

В частности, условие теоремы выполнено, если $\operatorname{char} K = 0$.
В общем случае $\dim \operatorname{Lie} G \geq \dim G$.

Пример 2.3.

- Из рассмотренных нами примеров GL_n и SL_n гладкие.
- $\mathrm{O}(\Gamma)$ в нашем определении не гладкая при $\operatorname{char} K = 2$, но если правильно определить, то и для $\operatorname{char} K = 2$ гладкая.
- μ_n гладкая iff $\operatorname{char} K$ не делит n.

Например, можно вручную посчитать, почему $\mathrm{O}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не гладкая при $\operatorname{char} K = 2$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Как у многообразия получается размерность 1. Размерность алгебры Ли получается 3 при $\operatorname{char} K = 2$ (проверить это руками).

Если имеется точная последовательность

$$1 \to C \to G \to H \to 1,$$

тогда возникает точная последовательность векторных пространств

$$0 \to \operatorname{Lie} C \to \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} H \to 0.$$

Пример 2.4. $\mathrm{SL}_n \to \mathrm{GL}_n \to \mathbb{G}_m$ даёт $M_n \xrightarrow{tr} \mathbb{G}_a$.

3 Классификация полупростых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем

27 февраля 2011 г.

Начнем с напоминания некоторых вещей. Пусть G — групповая схема над полем F. Для расширения E/F возникает групповая схема G_E над E.

- На уровне уравнений это означает, что у нас были уравнения над F, а потом мы рассмотрели их же над E.
- На уровне алгебр Хопфа это означает переход к $E[G_E] := F[G] \otimes_F E$.
- На уровне точек это означает переход от F-алгебры $G(R)$ к E-алгебре $G_E(R)$.

G гладкая iff $\dim \operatorname{Lie} G = \dim G$ iff $\overline{F}[G_{\overline{F}}]$ не имеет ненулевых нильпотентов.

Пример 3.1. μ_n гладкая iff $\operatorname{char} F \nmid n$.
Если $n = m\,p$, где $p = \operatorname{char} F$, то в $F[x]/(x^n - 1)$ выполняется $(x^m - 1)^p = 0$.

Если $\operatorname{char} F = 0$, то все групповые схемы гладкие.

Неабелева G называется (**полу**)**простой алгебраической группой**, если

1. G гладкая.

2. $G_{\overline{F}}$ не имеет связных (разрешимых) замкнутых нормальных делителей.

Теперь мы на время предположим, что работаем над алгебраически замкнутым полем. $\underbrace{\mathbb{G}_m \times \cdots \times \mathbb{G}_m}_{r}$ называется (**расщепимым**) **тором**, а r называется его **размерностью**.

Выберем внутри G расщепимый тор наибольшего ранга r (что тоже самое, максимальный по включению). Такой наибольший ранг называется **размерностью** G.

Теорема 3.1. *Все такие торы сопряжены элементом $G(F)$. То есть если $T \leq G$ и $T' \leq G$ — соответствующие торы, то $T' = g\,T\,g^{-1}$ для некоторого $g \in G(F)$.*

Пример 3.2. $G = \mathrm{SL}_n$ — простая алгебраическая группа. В ней максимальный тор есть $\mathbb{G}_m^{n-1}$.

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}, \quad t_1 \cdots t_n = 1.$$

Ранг SL_n равен $n-1$.

Если имеется точное представление $G \to \mathrm{GL}_n$, где G — простая алгебраическая группа, то представление пропускается через SL_n (иначе рассмотрим $G \to \mathrm{GL}_n \xrightarrow{det} \mathbb{G}_m$). Прообраз тора в SL_n — это максимальный расщепимый тор в G (его размерность может быть меньше $n-1$).

Пусть $T \leq G$.

$N_G(T)$ — **нормализатор тора**. Это замкнутая подгруппа.

$$N_G(T)(R) := \{g \in G(R) \mid \forall S/R \quad g_S\,T_S\,g_S^{-1} \leq T_S\}.$$

$N_G(T)/T$ — постоянная конечная группа W, **группа Вейля**.

Пример 3.3. $N_{\mathrm{SL}_n}(T)$ — группа **мономиальных матриц** с определителем 1 (в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно один ненулевой элемент).

Например, для SL_2 это задается уравнениями

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1,\ ac = 0,\ ab = 0,\ bd = 0,\ cd = 0\right\}.$$

Над полем получаются точки

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$N_{\mathrm{SL}_n}(T)/T \simeq S_n$.

Характерами G называется $\chi^*(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$.

Если G — расщепимый тор, то $\chi^*(G) \simeq \mathbb{Z}^r$. Характеры имеют вид $(t_1, \ldots, t_m) \mapsto t_1^{a_1} \cdots t_m^{a_m}$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

$T \to \mathrm{GL}(V)$, где V — векторное пространство над F. На V возникает $\mathbb{Z}^r$-градуировка.

$$V = \bigoplus_{\chi \in \chi^*(T)} V_\chi,$$

$$V_\chi = \{v \in V \mid \forall S/R \quad t_S\,v_s = \chi(t_S)\,v_S\}.$$

χ, такие что $V_\chi \neq 0$ называются **весами представления**.

Теорема 3.2. $C_G(T) = T$.

$T \leq G$. G действует на $\mathrm{Lie}(G)$ сопряжениями, поэтому и T действует на $\mathrm{Lie}(G)$ сопряжениями. $T \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}\, G)$.

$$\mathrm{Lie}\, G = \underbrace{\mathrm{Lie}\, T}_{V_0} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (\mathrm{Lie}\, G)_\alpha.$$

Φ — конечное подмножество в $\chi^*(T) = \mathbb{Z}^r$, **система корней** G.

$(\mathrm{Lie}\, G)_\alpha$ одномерные.

Группа Вейля W (т.е $N_G(T)/T$) действует на $\chi^*(T)$ и как-то переставляет Φ.

На $\chi^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ выберем W-инвариантное скалярное произведение (например, возьмем сначала $(\cdot,\cdot)_0$, а потом перейдем к $(u,v) := \sum_{w\in W} (w\, u, w\, v)_0$.)

$\Phi \subset \mathbb{R}^r$ является **абстрактной системой корней**, т.е. выполнены аксиомы

1. $\mathbb{R}\,\Phi = \mathbb{R}^r$.

2. Для каждого $\alpha \in \Phi$ имеем $S_\alpha(\Phi) = \Phi$, где S_α — отражение относительно α.

$$S_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\,(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\,\alpha.$$

   В частности, $S_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

3. Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\frac{2\,(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ — целое число.

4. Если $\alpha \in \Phi$, то $2\,\alpha \notin \Phi$ (условие для **приведенной** системы корней).

Пример 3.4.

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{SL}_n = \{x \in M_n \mid \mathrm{tr}\, x = 0\}.$$

T действует сопряжениями на $\mathrm{Lie}\,\mathrm{SL}_n$.

Матричные единицы $\langle e_{ij}\rangle$, $i \neq j$, порождают весовое подпространство.

$$\varepsilon_i := \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \mapsto t_i.$$

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, $\sum \varepsilon_i = 0$.

Вес $\langle e_{ij}\rangle$ — это $\varepsilon_i - \varepsilon_j$.

Система корней — это множество A_{n-1}

$$\{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

ε_i — ортогональный базис. Тогда скалярное произведение W-инвариантно.

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1, \quad (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ для } i \neq j.$$

В системе корней $\Phi \subset \mathbb{R}^r$ можно выбрать набор **простых корней** $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, т.е. так что выполняются условия

1. $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Phi$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ образуют базис $\mathbb{R}^r$.

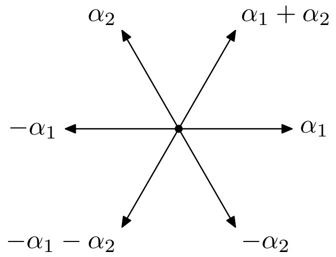
2. $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$, если $i \neq j$.

Такой набор простых корней всегда существует, и один переводится в другой единственным элементом группы Вейля. В нашем случае система корней — A_{n-1}, группа Вейля — $W = S_n$, и всего имеется $n!$ наборов простых корней. Один из них такой:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n.$$

Теорема 3.3. *Любой корень $\alpha \in \Phi$ записывается в виде $\sum m_i\,\alpha_i$, где $m_i \in \mathbb{Z}$ — все неотрицательные или неположительные.*

Пример 3.5. Для A_2 имеем



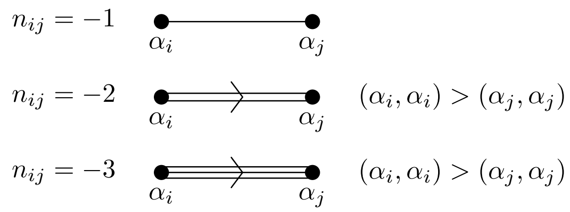
Для простых корней обозначим $n_{ij} := \frac{2\,(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$. Матрица (n_{ij}) называется **матрицей Картана**. Она определяет систему корней.

Пример 3.6. Для A_n матрица Картана имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

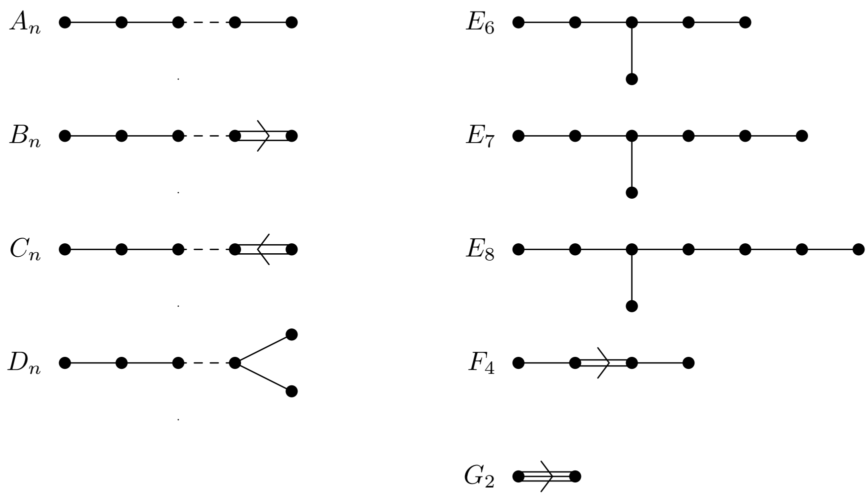
В общем случае при $i = j$ значение n_{ij} всегда 2, а при $i \neq j$ имеем $n_{ij} = -1, -2, -3$.

По матрице Картана рисуется **диаграмма Дынкина**. Она состоит из вершин для $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Для $n_{ij} = -1$ рисуется одно ребро между α_i и α_j, для $n_{ij} = -2$ — двойное ребро, а для $n_{ij} = -3$ — тройное. Также ставится знак $>$, который показывает $(\alpha_i, \alpha_i) > (\alpha_j, \alpha_j)$.



Теорема 3.4. *Над алгебраически замкнутым полем*

1. *Полупростая алгебраическая группа с точностью до центральной изогении задается своей системой корней.*
2. *Система корней задается матрицей Картана, которую можно изобразить в виде диаграммы Дынкина.*
3. *Любая диаграмма Дынкина есть несвязное объединение картинок следующего вида:*



Номер n в серии — это число вершин в графе.

Нужно пояснить, что значит «с точностью до центральной изогении».

Отображение $G \xrightarrow{\varphi} H$ называется **центральной изогенией**, если

1. $\ker\varphi \le \mathrm{Cent}(G)$.

   Подразумевается $(\ker\varphi)(R) := \ker(G(R) \to H(R))$.

2. $\ker\varphi$ — конечная схема над F (т.е. координатная алгебра конечномерна).

3. φ сюръективно.

H_1 и H_2 называются **изогеничными**, если найдется G с центральными изогениями $G \to H_1$ и $G \to H_2$.

Например, SL_n и PGL_n вместе соответствуют диаграмме A_{n-1}.

$$1 \to \mu_n \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

Часть II
Семинар

4 Введение

13 февраля 2011 г.

Работа Панина и Пименова о квадратичных формах (где это всё записано?).

Простая формулировка. *Пусть* $K = \mathbb{C}(z_1, \ldots, z_n)$ *и* $R := \{\frac{g(z)}{h(z)} \mid h(0) \neq 0\} \subset K$ *— регулярные функции в окрестности* 0*. Пусть* $u \in R^\times$*. Рассмотрим уравнение*

$$T_1^2 + \cdots + T_k^2 = u.$$

(Предполагаем $k \geq 2$*.) Если уравнение имеет решение в* K*, то оно имеет решение и в* R*.*

Интересующая нас задача: классифицировать простые алгебраические группы над произвольным полем (или локальным регулярным кольцом). В каком смысле — мы объясним. Что такое простые алгебраические группы — это обсуждается выше в записках спецкурса.

Как все знают, над алгебраически замкнутыми полями классификацию простых алгебраических групп дают диаграммы Дынкина. Четыре серии:

- A_n — PGL_{n+1}.
- B_n — SO_{2n+1}.
- C_n — PGSp_{2n}.
- D_n — SO_{2n}.

Исключительные группы: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Имеется точная последовательность

$$1 \to \mu_n \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

«Теорема типа Шпрингера»: *пусть* G *и* G' *— группы типа* G_2 *над полем* K*. Пусть расширение* $[L : K]$ *нечетное. Тогда если* $G_L \simeq G'_L$*, то* $G \simeq G'$*.*

С точностью до каких-то тонкостей, имеем

$$H^1(K, G_0^{ad}) \approx \{\text{присоед. простые алг. группы над } K \text{ того же типа, что и } G_0\}.$$

Это функториально в том смысле, что расширение полей L/K индуцирует морфизм $H^1(K, G^{ad}) \to H^1(L, G^{ad})$.

Наша высокая цель — построить функтор F, сопоставляющий полям абелевы группы с гомоморфизмом следа, так что конечное расширение $[L : K]$ давало бы морфизм $F(L) \to F(K)$ и естественное преобразование

$$H^1(K, G_0^{ad}) \to F(K).$$

Например, для $G_0 = \mathrm{PGL}_2 = \mathrm{Aut}(M_2)$ ответ такой:

$$F\colon K \rightsquigarrow K_2^M(K)/2,$$

где $K_2^M(K) = I^2(K)/I^3(K)$.

5 Теорема Меркурьева–Суслина и гипотеза Блоха–Като

Пусть A — центральная простая алгебра над полем K (более общее понятие — **алгебра Азумайи**, **Azumaya algebra**). Ей соответствует элемент $[A]$ в группе Брауэра $\operatorname{Br}(K)$.

- **Теорема Меркурьева** (1981) — изоморфизм ${}_2\operatorname{Br}(K) \simeq K_2^M/2$, а также следствие про $[A] \in {}_2\operatorname{Br}(K)$.

  [`http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0389.0393.ocr.pdf`]

  [`http://www.math.ethz.ch/~knus/sridharan/merkurjev84.pdf`]

- **Теорема Меркурьева–Суслина** (1982) — изоморфизм ${}_p\operatorname{Br}(K) \simeq K_2^M/p$.

  [L.H. Rowen, Ring theory, Vol. 2, §7.2]

- **Гипотеза Блоха–Като** («norm residue isomorphism theorem») — $K_n^M/p(-) \simeq H^n_{\text{ét}}(-, \mu_p^{\otimes n})$.

  [`http://arxiv.org/abs/0805.4430`]

6 Кольцо Гротендика–Витта

$H^1(K, \mathrm{O}_n)$ — это классы изометрии невырожденных квадратичных форм ранга n.

Имеется функтор в кольцо Витта

$$H^1(K, \mathrm{O}_n) \to W(K), \quad f \mapsto [f].$$

Разберемся, что такое **кольцо Витта** $W(K)$. В нем

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \perp g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \otimes g], \\ [x\,y] &= 0. \end{aligned}$$

$f \perp g$ имеет следующий смысл. Если f — квадратичная форма на V, а g — квадратичная форма на W, то на $V \oplus W$ задается квадратичная форма $(f \perp g)(u \oplus v) := f(u) + g(v)$.

Имеется корректно определенный гомоморфизм

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}\colon W(K) &\to \mathbb{Z}/2, \\ [f] &\mapsto \operatorname{rk} f \mod 2. \end{aligned}$$

$I := \ker \operatorname{rk}$ называется **фундаментальным идеалом**.

Кольцо Гротендика–Витта $GW(K)$ определяется следующим образом. В нем нет условия $[x\,y] = 0$. Сначала определяется сложение и умножение, делающее $GW(K)$ полукольцом:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \perp g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \otimes g]. \end{aligned}$$

Потом мы берем группу Гротендика и получаем кольцо.

7 $\mathbb{A}^1$-гомотопия и гипотеза Мореля

[`http://mathunion.org/ICM/ICM1998.1/Main/00/Voevodsky.MAN.ocr.pdf`]

(Не то чтобы я понял это, но тут есть что поразбирать)

$\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория пространств с отмеченными точками над K.

Сфера $S^0 = \{+, \bullet\}$ состоит из двух точек, из которых $\bullet$ — отмеченная.

Теорема Мореля (1999?) состоит в вычислении

$$\pi_0^{stab}(S^0) \simeq \mathrm{GW}(K)$$

Fabien Morel, On The Motivic π_0 of the Sphere Spectrum.
`http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-0948-5_7`

Желаемый функтор F мог бы давать $H^1(K,G) \to H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{èt}}G)$.

Аналог этого в топологии следующий. Пусть задано главное G-расслоение $\mathfrak{g} \to X$ для клеточного пространства X. Сопоставим ему отображение в классифицирующее пространство $X \xrightarrow{f_{\mathfrak{g}}} BG$.

Существует соответствие между множеством классов изоморфности главных G-расслоений над X и гомотопическими классами $[X, BG]$.

Имеется инъекция

$$[X, BG] = \pi_0(\mathrm{Map}(X, BG)) \hookrightarrow H_0(\mathrm{Map}(X, BG)).$$

Гипотеза Мореля заключается в том, что в алгебраической ситуации тоже получается инъекция

$$[\operatorname{Spec} K, B^{\text{èt}}G] = \pi_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{èt}}G) \hookrightarrow H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{èt}}G).$$

8 Формы Пфистера

Рассмотрим фильтрацию на кольце Витта

$$W(K) \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \cdots$$

Теорема 8.1. $\bigcup_n I^n = \{0\}$.

$W(K)/I = \mathbb{Z}/2$.

I/I^2 как абелева группа порождается элементами вида $\langle\langle a \rangle\rangle := x^2 - a\,y$ для некоторого $a \in K^\times$.

$I^n/^{n+1}$ порождается тензорными произведениями элементов

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle = \langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\langle a_n \rangle\rangle.$$

$\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ называется **n-кратной формой Пфистера**.

Пример 8.1. При $n = 1$ имеем $a \in K^*/(K^*)^2$. $K(\sqrt{a})$ — квадратичное расширение.

При $n = 2$ символ $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ есть норма кватернионов $H = (a, b)$ над K.

При $n = 3$ имеем октонионы (a, b, c) над K (что соответствует группам типа G_2 над K).

Теорема 8.2 (Арасон)**.** *Если* $[q] \in I^n$, *то* $\operatorname{rk} q \geq 2^n$.

Если $\operatorname{rk} q = 2^n$, *то* $q = \alpha \cdot \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$, *где* $\alpha \in K^\times$.

В частности, $\bigcup I^n = 0$.

- $e_0(q) := \operatorname{rk} q \mod 2$.
- Если $e_0 = 0$, то $[q] \in I$. Определим $e_1(q) := [\![q]\!] \in I/I^2$. Этому соответствует $\langle\langle a \rangle\rangle$, где a — дискриминант q (с точностью до знака?).
- Если $e_1 = 0$, то $e_2(q) := [\![q]\!] \in I^2/I^3$.

  q можно сопоставить $C_0^+(q)$, четную положительную часть алгебры Клиффорда, это будет C.S.A. Имеем $[C_0^+(q)] \in {}_2\operatorname{Br}(K)$. По теореме Меркурьева, это сумма

$$[(a_1, b_1)]\,[(a_2, b_2)] \cdots [(a_k, b_k)]$$

$$\langle\langle a_1, b_1 \rangle\rangle + \langle\langle a_2, b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle a_k, b_k \rangle\rangle.$$

- Если $e_2(q) = 0$, то можно определить $e_3(q)$ — **инвариант Арасона**.

9 Торсоры

Пусть G — простая алгебраическая группа над K.

G-торсором называется многообразие X над K, такое что

- Определено действие $G \times X \to X$.
- Над алгебраическим замыканием $\overline{K}$ имеется изоморфизм $X_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$ (как многообразий с G-действием).

Раньше торсоры назывались «главными однородными пространствами» (principal homogeneous space).

Пример 9.1. Действие G сдвигами на себе дает **тривиальный G-торсор**.

По определению, $H^1(K; G)$ есть множество классов изоморфности G-торсоров с отмеченной точкой (тривиальный G-торсор).

Пример 9.2. $\mu_2 = \{x^2 = 1\}$, $X := \{y^2 = a\}$. μ_2 действует на X.
$y^2 = a$, $x^2 = 1 \Rightarrow (x\,y)^2 = a$.

X — тривиальный G-торсор iff у него есть рациональная точка: $X(K) \neq \varnothing$.
Если G — абелева группа, то на торсорах имеется сложение.
$H^1(K, \mu_2) \simeq K^*/(K^*)^2$ как абелева группа. И вообще $H^1(K, \mu_n) \simeq K^*/(K^*)^n$

10 Скрученные формы

$\mathrm{O}_{2n} = \mathrm{Aut}(q_{split})$, где $q_{split} = x_1\,y_1 + \cdots + x_n\,y_n$ — **расщепимая форма**.

$H^1(K, \mathrm{O}_{2n})$ есть множество классов изометрии невырожденных квадратичных форм ранга $2n$.

Пусть q — квадратичная форма. $\mathrm{Iso}(q_{split}, q)$ есть искомый торсор. На этом действует O_{2n}. Над алгебраически замкнутым полем q изоморфна q_{split}, и получается $\mathrm{Iso}(q_{split}, q_{split})$.

Пусть A — некоторая алгебраическая структура над полем K (например, квадратичное пространство, конечномерная ассоциативная алгебра, конечномерная неассоциативная алгебра). Тогда **скрученная форма** A' для A есть такая структура над K, что при переходе к алгебраическому замыканию $A'_{\overline{K}} \simeq A_{\overline{K}}$.

Теорема. $H^1(K, \mathrm{Aut}(A))$ есть множество классов изоморфности скрученных форм A над K.

Изоморфизм такой:

$$A \overset{\sim}{\longmapsto} \mathrm{Iso}(A, A').$$

На $\mathrm{Iso}(A, A')$ есть структура алгебраического многообразия.

Замечание. Пусть X — проективное многообразие над K. Теорема (Гротендик): *функтор $U \mapsto \mathrm{Aut}_U(X \times U)$ представим в схемах.*

Контрпример: $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ не конечномерно.

Пример: $A := M_n(K)$. $\mathrm{Aut}(A) = \mathrm{PGL}_n$.
$H^1(K, M_n(K))$ — это скрученные формы $M_n(K)$, то есть центральные простые алгебры размерности n^2, взятые с точностью до изоморфизма.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathrm{PGL}_n = \mathrm{GL}_n / \mathbb{G}_m$.

Автоморфизмы сохраняют ранг.

$H^1(K, \mathrm{PGL}_n)$ есть множество скрученных форм $\mathbb{P}^{n-1}$ над K = **многообразия Севери–Брауэра**.

$$A \mapsto \mathrm{SB}(A) = \{\text{левые идеалы в } A \text{ разм. } n \text{ как } K\text{-вект. пр.}\}$$

Пример при $n = 2$: кватернионы $A = (a, b)$.

$\beta\, u+\gamma\, v+\delta\, u\, v$. Имеем векторное пространство u, v, uv. Условие $\{$норма $=0\}$ задает проективное подмногообразие в $\mathbb{P}^2$.

$x^2 - a\, y^2 - b\, z^2 = 0$ — коника.

$$\begin{aligned} \mathrm{PGL}_2 &\simeq \mathrm{SO}_3, \\ \{\text{кватернионы}\} &\simeq \{\text{формы ранга 3 с трив. дискриминантом}\}. \end{aligned}$$

11 Точные последовательности алгебраических групп

Точность последовательности алгебраических групп над K

$$1 \to C \to H \to G \to 1$$

означает следующее:

1. C — алгебраическая подгруппа в H.
2. Существует сюръекция $H(\overline{K}) \to G(\overline{K})$ *над алгебраическим замыканием поля* K.
3. $C = \ker(H \to G)$, $C(R) = \ker(H(R) \to G(R))$.

Пример 11.1. Следующая последовательность алгебраических групп точна в указанном смысле:

$$1 \to \mu_2 \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1,$$

где $\mathbb{G}_m(K) := \{(x, y) \mid x\, y = 1\}$, и отображение $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ есть $x \mapsto x^2$ (это сюръекция над алгебраическим замыканием).

Пример 11.2. Следующая последовательность точна:

$$\mu_2(K) \to K^\times \to K^\times \to H^1(K, \mu_2) \to H^1(K, \mathbb{G}_m) \to H^1(K, \mathbb{G}_m).$$

(Отображение $K^\times \to K^\times$ есть $x \mapsto x^2$.)

Теорема 11.1 (Теорема 90)**.**

$$H^1(K, \mathbb{G}_m) = \{\bullet\},$$
$$H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{\bullet\}.$$

Из точности последовательности выше и теоремы 90 получается

$$H^1(K, \mu_2) \simeq K^\times/(K^\times)^2.$$

Пример 11.3.

$$1 \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{GL}_n \xrightarrow{det} \mathbb{G}_m \to 1.$$

$$\mathrm{GL}_n(K) \xrightarrow{det} \mathbb{G}_m(K) \to H^1(K, \mathrm{SL}_n) \to H^1(K, \mathrm{GL}_n).$$

Здесь $H^1(K, \mathrm{SL}_n) = \{\bullet\}$ и $H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{\bullet\}$.

Пример 11.4.

$$1 \to \mu_n \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

$$\mu_n(K) \to \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{PGL}_n(K) \to K^\times/(K^\times)^2 \to \{\bullet\} \to H^1(K, \mathrm{PGL}_n).$$

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

Пример 11.5.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SL}_n & \to & \mathrm{PGL}_n, \\ g & \mapsto & (x \mapsto g\,x\,g^{-1}) \in \mathrm{Aut}(M_n). \end{array}$$

Это сюръекция алгебраических групп, но не сюръекция на точках.

$$1 \to \mu_n \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

Теорема 11.2. *Если имеется точная последовательность* $1 \to C \to H \to G \to 1$*, то возникает точная последовательность множеств с отмеченной точкой*

$$1 \to C(K) \to H(K) \to G(K) \to H^1(K, C) \to H^1(K, H) \to H^1(K, G).$$

См. книгу Серра «Когомологии Галуа».
27 февраля 2011 г.

12 Вторые когомологии

- $H^1(F, G)$ — множество G-торсоров. *Если G коммутативна*, то это аффинная алгебраическая группа.

  (Как в этом случае умножаются торсоры? — Что-то типа $E_1 * E_2 = (E_1 \times E_2)/((e_1, e_2) = (g\,e_1, g\,e_2))$.)

- $H^0(F, G)$ — это функтор $F \rightsquigarrow G(F)$, т.е. функтор точек. *Если G коммутативна*, то $H^i(F, G)$ можно определить как i-й производный функтор. При $i = 1$ это совпадает с первым определением.

Теорема 12.1. *Пусть имеется точная последовательность* $1 \to C \to G \to H \to 1$*. Пусть* $C \leq \mathrm{Cent}(G)$*. Тогда точная последовательность продолжается до вторых когомологий:*

$$1 \to C(F) \to G(F) \to H(F) \to H^1(F, C) \to H^1(F, G) \to H^1(F, H) \to H^2(F, C).$$

Пример 12.1. $H^2(F, \mathbb{G}_m)$.
Пусть X — квазипроективное многообразие. Тогда $H^2(X, \mathbb{G}_m)_{tors} = \mathrm{Br}(X)$. (Загадочное замечание: подразумевается топология tppf, а для этальной топологии в определении торсора вместо $\overline{F}$ нужно взять F^{sep}.)

Пример 12.2 (Топологический аналог)**.** Пусть X — топологическое многообразие или CW-комплекс.
Пусть G — топологическая группа (например, S^1, S^3, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$).
Имеется левое действие $G \times (G \times X) \to (G \times X)$, $g_1 \cdot (g_2, x) \mapsto (g_1\,g_2, x)$.
Левое действие послойно и свободно на скрученной форме $G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$.
Для всех $x \in X$ возникает действие $G \times \mathcal{G}(x) \to \mathcal{G}(x)$. Здесь $\mathcal{G}(x) \simeq G$, и этот изоморфизм зависит от x.
$(\mathcal{G}, G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G})$ в топологии называется **главным G-расслоением** (**principal G-bundle**).
$\mathcal{G}/G = X$.

Пример 12.3. $\mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1)$.
Пусть $L \to X$ — комплексное линейное расслоение, $z(X)$ — нулевое сечение.
$\mathbb{C}^\times \times (L - z(X))$. Имеем изоморфизм $L(x) - 0 \simeq \mathbb{C}^\times$, зависящий от x.

- $H^1(X, \mathbb{C}^\times)$ — классы изоморфизма $\mathbb{C}^\times$-торсоров над X. Они соответствуют линейным расслоениям над X.
- $H^1(X, \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1))$ — скрученные формы расслоения $\mathbb{C} \times X$ над X.
- $H^1(X, \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n))$ — это (1) скрученные формы расслоения $\mathbb{C}^n \times X$ над X, то есть (2) векторные расслоения над X со слоем $\mathbb{C}^n$.

- Пусть $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i\, v_i)$ — автоморфизмы, сохраняющие квадратичную форму.

  Тогда $H^1(X, \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i\, v_i))$ — это (1) скрученные формы расслоений вида $(\mathbb{C}^n \times X, \sum u_i, v_i) \to X$, то есть (2) векторные расслоения $E \to X$ со слоем $\mathbb{C}^n$ и с квадратичной формой в слоях.

- Рассмотрим $\mathrm{Aut}(M_n(\mathbb{C})) = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$. Тогда $H^1(X, \mathrm{Aut}(M_n(\mathbb{C})))$ — это скрученные формы расслоений вида $M_n(\mathbb{C}) \times X \to X$.

Имеется точная последовательность

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \to 1.$$

Отсюда получается точная последовательность

$$\begin{gathered} 1 \to \Gamma(X, \mathbb{C}^\times) \to \Gamma(X, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \to \Gamma(X, \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) \to \\ \to H^1(X, \mathbb{C}^1) \to H^1(X, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \to H^1(X, \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) \to H^2(X, \mathbb{C}^\times). \end{gathered}$$

Топологическая группа Брауэра есть $\mathrm{Br}_{top}(X) := H^2_{top}(X, \mathbb{C}^\times)$.

Пример 12.4. $\mathbb{C}^\times \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.

$$H^2(X, S^1) \twoheadrightarrow H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}.$$

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to S^1 \to 0$$

$$\mathrm{Br}_{top}(X) = H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}.$$

Нечто такое написано как определение (у Серра? Гротендика?).

А какие нам известны нетривиальные скрученные формы алгебры $M_n(K)$? Так это и есть центральные простые алгебры.

Имеем точную последовательность $1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1$.

$$H^1(F, \mathrm{GL})_n \to H^1(F, \mathrm{PGL}_n) \to H^2(F, \mathbb{G}_m).$$

$H^1(F, \mathrm{GL})_n = \{\bullet\}$, и $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ — центральные простые алгебры степени n. Это отображение дает изоморфизм

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(F) & \simeq & H^2(F, \mathbb{G}_m), \\ A & \mapsto & [A]. \end{array}$$

Имеется точная последовательность

$$1 \to \mu_2 \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1,$$

где $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ — отображение $x \mapsto x^n$.

$$\begin{tikzcd} H^1(F, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(F, \mu_2) \arrow[r] & H^2(F, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(F, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \\ \{\bullet\} & & \mathrm{Br}(F) \arrow[r, "n"] & \mathrm{Br}(F) \end{tikzcd}$$

$H^2(F, \mu_2) = {}_n\,\mathrm{Br}(F)$.

$$1 \to \mathrm{SO}_n \to \mathrm{O}_n \xrightarrow{det} \mu_2 \to 1.$$

При $\mathrm{char}\, F \neq 2$

$$\mathrm{O}_n(F) \to \mu_2(F) \to H^1(F, \mathrm{SO}_n) \to H^1(F, \mathrm{O}_n) \to H^1(F, \mu_2).$$

Отсюда $H^1(F, \mathrm{SO}_n)$ — подмножество в $H^1(F, \mathrm{O}_n)$ (невырожденные квадратичные формы ранга n с точностью до изометрии).

$$1 \to \mu_2 \to \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n \to 1.$$

$$\mathrm{Spin}_n(F) \to \mathrm{SO}_n(F) \xrightarrow{N} H^1(F, \mu_2) \xrightarrow{0} H^1(F, \mathrm{Spin}_n) \to H^1(F, \mathrm{SO}_n) \xrightarrow{e_2} H^2(F, \mu_2).$$

Здесь

- $H^1(F, \mu_2) \simeq F^\times/(F^\times)^2$.
- $H^1(F, \mathrm{SO}_2)$ — невырожденные квадратичные формы с дискриминантом 1.
  $e_1 \colon I \to I/I^2 = F^\times/(F^\times)^2$ — дискриминант.
- $H^2(F, \mu_2) = {}_2\operatorname{Br}(F)$.
- N — **спинорная норма**. А именно, каждый элемент SO_n разлагается в отражения $g = S_{v_1} \cdots S_{v_{2k}}$ и $N(g) := q(v_1) \cdots q(q_{2k}) \pmod{(F^\times)^2}$.

$e_2 \colon I^2 \to I^2/I^3 = {}_2\operatorname{Br}(F)$.

Пусть G — торсор, действует на X справа. Рассмотрим скрученную форму X

$$E^X := (X \times E)/(x, e) \sim (x\, g^{-1}, g\, e).$$

На ней действует E^G. (G действует сопряжениями на себе.) $E^G = \mathrm{Aut}_{G\text{-торсора}}(E)$, поэтому это группа.

Пример 12.5. $H^1(F, \mathrm{O}_n)$.
$E \in H^1(F, \mathrm{O}_n)$ задается формой q, $E = \mathrm{Isom}(q_0, q)$, где q_0 — расщепимая форма.
$O(q_0)$ действует на квадрике $Q_0 := \{q_0 = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}$.
$E^{Q_0} = \{q = 0\}$.
$O(q) = E^{O(q_0)}$.

13 Многообразия Севери–Брауэра

Пример 13.1. $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$.
A — центральная простая алгебра степени n.
$E = \mathrm{Isom}_{F\text{-}\mathcal{A}lg}(M_n, A)$ — торсор.
$\mathbb{P}^{n-1}$.
$v \in \mathbb{A}^n - \{0\}$.
$\langle v \rangle \rightsquigarrow$ правый идеал в $M_n\{x \mid \operatorname{im} x \subseteq \langle v \rangle\}$.
$E^{\mathbb{P}^{n-1}}$ — Множество правых идеалов размерности n в A, многообразие Севери–Брауэра $\mathrm{SB}(A)$.
Уравнение многообразия

$$\mathrm{SB}(A) := \{W \subset A \mid W \cdot A \subseteq A\}.$$

$$\mathrm{SB}(A) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(n, A) = \mathrm{Gr}(n, n^2).$$

$$\begin{tikzcd}
A \times \mathrm{SB}(A) & A \times \mathrm{Gr}(n, n^2) & \\
\tau|_{\mathrm{SB}(A)} \arrow[u, hook] \arrow[d] & \tau_n \arrow[u, hook] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathrm{SB}(A) \arrow[r, hook] & \mathrm{Gr}(n, n^2) & \{w\}
\end{tikzcd}$$

Лемма 13.1. $\mathrm{End}_{\mathrm{SB}(A)}(J_A) \simeq A$ *(эндоморфизмы расслоения).*

Утверждение 13.1. $\tau|_{\mathrm{SB}(A)}$ *выдерживает правое A-действие на $A \times \mathrm{SB}(A)$.*

$J_A := \tau|_{\mathrm{SB}(A)}$.

Пример 13.2. $\mathrm{Gr}(K, n)$ (линейные k-мерные подпространства в $\mathbb{A}^n$).

U — k-мерное подпространство в $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \{x \mid \operatorname{im} x \subseteq U\}$ — правый идеал размерности n.

$\mathrm{SB}_k(A)$ — обобщенное многообразие Севери–Брауэра, многообразие правых идеалов размерности k.

$\mathrm{Gr}(k, n) \simeq \mathrm{Gr}(n-k, n)$ (напомним, что это не канонический изоморфизм). Аналог этой двойственности: $\mathrm{SB}_k(A) \simeq \mathrm{SB}_{n-k}(A^{op})$.

Утверждение 13.2. $\mathrm{SB}(A)(F) \neq \varnothing \Rightarrow A \simeq M_n$.

$\mathrm{SB}_k(A)(F) \neq \varnothing \Rightarrow \operatorname{ind} A \mid k$.

(Напомним, что такое ind. Для центральной простой алгебры имеем $A \simeq M_m(D)$, где D — тело. $m \cdot \deg D = n$. $\deg D =: \operatorname{ind} A$, где $\deg D := \sqrt{\dim D}$.)

Скрученные формы $\mathbb{P}^{n-1}$ — это скрученные формы M_n. Имеем $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathrm{PGL}_n$.

$\mathrm{Aut}(q_0) = O(q_0)$.

$\mathrm{Aut}(Q_0)^+ = \mathrm{PGO}(q_0)$, где Q_0 — квадрика $\{q = 0\}$.

$H^1(F, \mathrm{PGO}(q_0))$ — классы (A, σ) изоморфности центральных простых алгебр A с ортогональной инволюцией σ.

Предположим $\operatorname{char} F \neq 2$.

$$\{\text{правые идеалы } I \text{ в } (A,\sigma) \text{ размерности } \deg A \mid \sigma(I)\cdot I = 0\} =: X_{(A,\sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A).$$

$$Q_{\sigma(q_{\overline{F}})} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{F}}^{\deg A - 1} = \mathrm{SB}(A) \otimes_F \overline{F}.$$

Вложение $X_{(A,\sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A)$ есть аналог вложения квадрики в проективное пространство.