27.02.2012

$H^1(F, G)$ — множество G-торсоров (по отн. к топологии:)

Если Зарисски — F, торсоры из этальной — F_s, fppf — $\overline{F}$

G-торсор: E — многообразие, 1) $G \times E \longrightarrow E$ — действие
2) $E_{\overline{F}} \simeq G_{\overline{F}}$ с левым действием

Частный случай G — коммутативная аффинная алг. группа

$H^0(F, G) := G(F)$ — F-точки

$H^i(F, G)$ — производный функтор
при $i=1$ это совпадает со старым определением

$\boxed{\text{Теорема}}$ $1 \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$

Предположим, что $C \leq Cent(G)$

Тогда точная последовательность продолжается до H^2

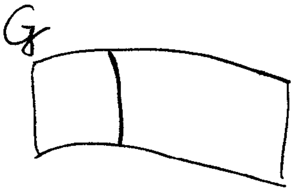
$$1 \longrightarrow C(F) \longrightarrow G(F) \longrightarrow H(F) \xrightarrow{\delta} H^1(F, C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(F, G) \longrightarrow H^1(F, H) \xrightarrow{\delta} H^2(F, C)$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $H^2(F, \mathbb{G}_m) = Br(F)$

$[A]$, A — центральная простая
$[A]\cdot[B] = [A \otimes_F B]$

Пусть X — многообразие (проективное)
тогда (т. Габбера) $H^2(X, \mathbb{G}_m)_{tors} = Br(X)$

fppf (лучше, чем etale)



G

G — топологич. группа
S^1, S^3, $SL_2(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$
$S^3 = \mathbb{H}$

& $G \times X$ вместе с левым действием G
или
скрученную форму $G \times X$:

$G \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ т.ч. G действует послойно

X — хорошее топологическое пространство (область в $\mathbb{R}^n$, многообразие, CW-комплекс)

$\forall x \in X$

$G \times \mathcal{G}(x) \to \mathcal{G}(x)$ — транзитивное действие

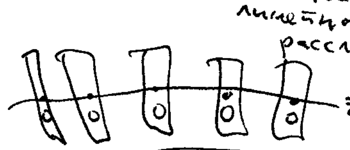
$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{G}(x) & \longrightarrow & \mathcal{G}(x) \\ id \times \varphi_x \Vert & & \wr\Vert \varphi_x \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

$\mathcal{G}/G = X$

$\sim$ $\mathcal{G}$ — главное G-расслоение
$\Vert$
G-torseur

$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

L — комплексное линейное расслоение над X



$z(X)$ — нулевое сечение

X

$\mathbb{C}^\times (L - z(X)) \longrightarrow L - z(X)$
$(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$

$L(x) - 0$
$\wr\Vert \varphi_x$
$\mathbb{C}^\times$

$$H^1(X, \mathbb{C}^\times) = \boxed{\text{классы изоморфизма } \mathbb{C}^\times\text{-торсоров над } X}$$

$L \mapsto L - 0(X)$, $\quad \mathcal{L}^\times \leftrightarrow \mathcal{L}$

$\boxed{\text{линейные расслоения над } X}$

$$\mathbb{C}^\times = GL_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\ell_{\mathbb{C}}), \quad \ell_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^1$$

$$H^1(X, \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\ell_{\mathbb{C}})) = \boxed{\text{формы расслоения } \mathbb{C}\times X \text{ над } X}$$

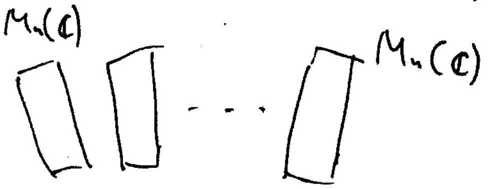
теперь посмотрим на

$$H^1(X, \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)) = \boxed{\text{формы расслоения } \mathbb{C}^n\times X \text{ над } X} = \boxed{\text{векторные расслоения над } X \text{ со слоем } \mathbb{C}^n \text{ с точностью до изоморфизма}}$$

$$H^1(X, \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \textstyle\sum u_i v_i)) = \boxed{\text{формы расслоения } \mathbb{C}^n\times X \to X, \text{ на } \mathbb{C}^n \text{ задана постоянная (не завис от } x\in X) \text{ кв. форма}} = \boxed{\text{вект. расслоения над } X \text{ со слоем } \mathbb{C}^n \text{ и с квадр. формой: } \forall x\in X\ E(x)\times E(x)\to\mathbb{C} \text{ с точностью до изоморфизма}}$$

$$H^1(X, \mathrm{Aut}(M_n(\mathbb{C}))) = \boxed{\text{формы расслоения } M_n(\mathbb{C})\times X \to X}$$

$$\mathrm{Aut}(M_n(\mathbb{C})) = PGL_n(\mathbb{C})$$



например,

$$\begin{array}{ccc} E & & \mathrm{End}(E) \\ \downarrow & \rightsquigarrow & \downarrow \\ X & & X \end{array} \quad : \quad \mathrm{End}(E)(x) = \mathrm{End}(E(x))$$

но бывают также $M_n \to X$ не изоморфные никакому $\mathrm{End}(E)$

– это нетривиальная топологическая алгебра Адзумайя

$Br_{top}(X)$

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to GL_n(\mathbb{C}) \to PGL_n(\mathbb{C}) \to 1$$

$$PGL_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(M_n(\mathbb{C}))$$

$$1 \to \Gamma(X, \mathbb{C}^\times) \to \Gamma(X, GL_n(\mathbb{C})) \to \Gamma(X, PGL_n(\mathbb{C})) \to$$

$$\to H^1(X, \mathbb{C}^\times) \to H^1(X, GL_n(\mathbb{C})) \to$$

$$\to \boxed{\text{кл. изоморфизма } M_n \to X} \xrightarrow{\partial} H^2(X, \mathbb{C}^\times)$$

$$Br_{top}(X) := H^2_{top}(X, \mathbb{C}^\times)$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $H^2(X, S^1) \to H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}$

$S^1 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{C}^\times$

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to S^1 \to 0$$

$$H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, S^1) \to H^3(X, \mathbb{Z}) \to H^3(X, \mathbb{R}) = H^3(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$$

$$H^3(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^3(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}$$

$$H^2(X, S^1) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ker}(\alpha) = H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}$$

На самом деле, $Br_{top}(X) := H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}$

Знакомы ли нам нетривиальные формы алгебры $M_n(k)$ над полем k?

т.е. A т.ч. $A \otimes_k \bar{k} \cong M_n(\bar{k})$

Берем $X = Spec(k)$

(точка, кольцо k)

$$1 \to \mathbb{G}_m \to GL_n \to PGL_n \to 1$$

$$H^1(F, GL_n) \to H^1(F, PGL_n) \to H^2(F, \mathbb{G}_m)$$

$H^1(F, GL_n) = \{*\}$

$H^1(F, PGL_n) =$ мн-во центральных простых алгебр степени n

$$A \longmapsto [A] \in Br(F)$$

$$H^1(F, PGL_n) \times H^1(F, PGL_m) \to H^1(F, PGL_{m})$$

E_1 — G-торсор

E_2 — G-торсор

$E_1 \times E_2 / \sim$

$(e_1, e_2) \sim (g e_1, g^{-1} e_2)$

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1$$

$$x \longmapsto x^n$$

$$H^1(F, \mathbb{G}_m) \to H^2(F, \mu_n) \to H^2(F, \mathbb{G}_m) \to H^2(F, \mathbb{G}_m)$$

$H^1(F, \mathbb{G}_m) = *$, $\quad Br(F) \xrightarrow{\cdot n} Br(F)$

$$\rightsquigarrow H^2(F, \mu_n) = {}_n Br(F)$$

с отвращением:

$$1 \longrightarrow SO_n \longrightarrow O_n \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow 1 \qquad (\mathrm{char}\, F \neq 2)$$

$$O_n(F) \twoheadrightarrow \mu_2(F) \to$$

$$\to H^1(F, SO_n) \longrightarrow H^1(F, O_n) \xrightarrow{disc} H^1(F, \mu_2)$$

O_n (1 $\qquad H^1(F,\mu_2) = F^*/(F^*)^2$

$$\Rightarrow H^1(F, SO_n) \subseteq H^1(F, O_n)$$

$H^1(F, SO_n)$ = (невыр. кв. формы дискриминанта 1)

$H^1(F, O_n)$ = (невырожденные квадратичные формы ранга n с точностью до изометрии)

$$e_1: I \longrightarrow I/I^2 \cong F^*/(F^*)^2$$

$$1 \to \mu_2 \to Spin_n \longrightarrow SO_n \longrightarrow 1$$

$$Spin_n(F) \longrightarrow SO_n(F) \xrightarrow{N} H^1(F, \mu_2) \xrightarrow{0} H^1(F, Spin_n) \to$$

$$\to H^1(F, SO_n) \to H^2(F, \mu_2)$$

не сюрьект.!

$H^1(F,\mu_2) = F^*/(F^*)^2$

$H^2(F,\mu_2) = {}_2Br(F)$

теорема Эйхлера

неизвестно что

спинорная норма:

q – форма;

$$g = s_{v_1} \cdot \ldots \cdot s_{v_{2k}}$$

$$N(g) = q(v_1) \cdot \ldots \cdot q(v_{2k}) \mod (F^*)^2$$

формы дискриминанта 1

это e_2

$$e_2: I^2 \longrightarrow I^2/I^3 = {}_2Br(F)$$

$$q \longmapsto C_0(q)$$ — четная часть алг. Клиффорда

$[C_0(q)]$ в $Br(F)$

E – левый торсор: $G \circlearrowright G$ — т.е. элемент $H^1(F, G)$

$G \circlearrowright X$

Пусть ~~$G \times X \to X$~~ – действие

Тогда можно подкрутить X на E:

$${}_EX := X \times E \Big/ (x, e) \overset{g}{\sim} (xg^{-1}, ge) \quad \text{— скрученная форма } X$$

На ней действует ${}_EG = \mathrm{Aut}_{G\text{-торс}}(E)$ – автоморфизмы E как G-торсора

группа, тут G действует на себе сопряжением

$${}_EG = G \times E/\sim \qquad (x', e')(h, e) = (x', e') \cdot (h', e') = (xh', e')$$

$(h,e) \sim (ghg^{-1}, ge)$ $\qquad (x',e') \in {}_EX$, $(h,e) \in {}_EG$

можно сдвинуть

~~Пример~~

$\mathbb{C}^n \times X \to X$ — тривиальное расслоение

$E \to X$ — $GL_n(\mathbb{C})$-торсор над X

$\mathcal{GL}(E) \subset \mathcal{E}nd(E) \to X$, $\quad \mathcal{E}nd(E) \xrightarrow{\det} X\times\mathbb{C} \hookleftarrow X\times\mathbb{C}^\times$

$\mathcal{E}nd(E)(x) = End(E(x))$

$\mathcal{E}nd(E) \not\cong X\times End(\mathbb{C}^n) \to X$

$\mathcal{GL}(E) \not\cong X\times GL_n(\mathbb{C})$

$\mathcal{GL}(E) =$ прообраз $X\times\mathbb{C}^\times$

$\mathcal{E}nd(E)$ действует на E

$\rightsquigarrow \mathcal{GL}(E)$ действует на E
$\quad\quad \shortparallel$
$\quad \underset{G\text{-торс.}}{Aut}(E)$

$\mathcal{GL}(E)(x) = GL(E(x))$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad H^1(F, O_n) =$

E задается кв. формой q,

и q — форма расщепимой формы q_0

При этом $E = Isom(q_0, q)$

$O(q_0)$ действует на квадрику $\{q_0 = 0\} = Q_0$

(например, $x_1y_1 + \dots + x_ny_n = 0$ в $\mathbb{P}^{2n-1}$)

${}_EQ_0 = \{q = 0\}$ и

$O(q)$ действует на ${}_EQ_0$

$\shortparallel$

${}_EO(q_0)$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad H^1(F, PGL_n)$

торсор E задается центральной простой алгеброй A степени n

$E = Isom_{F\text{-alg}}(M_n, A)$

что такое $\mathbb{P}^{n-1}$?

$v \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ $\quad\quad PGL_n = Aut(M_n)$

$\updownarrow$

правый идеал в M_n

$\{x : Im\, x \leq \langle v\rangle\}$

Множество всех таких идеалов

= множество правых идеалов размерности n

$\Rightarrow {}_E\mathbb{P}^{n-1}$ = мн-во правых идеалов размерности n в A

$= SB(A)$

таким образом, $SB(A) \hookrightarrow Gr(n, A) = Gr(n, n^2)$

$$\begin{array}{c} SB(A) \\ \parallel \\ \{W \in A \mid WA \subset W\} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
J_A = \tau|_{SB(A)} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[rr, dashed] & A \times SB(A) \arrow[dl] & \tau_n \arrow[r, hook] \arrow[d] & A \times Gr(n, A) \ni W \arrow[d] \\
SB(A) \arrow[rr, hook] & & Gr(n, A) \ni & W
\end{tikzcd}$$

A действует на $A \times SB(A)$

Утверждение: подрасслоение $\tau|_{SB(A)}$ выдерживает правое A-действие на $A \times SB(A)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathrm{End}_{SB(A)}(J_A) = A$

поэтому 2 описания $H^1(F, PGL_n)$ — ~~формы~~ алг. Адзумайя и формы $\mathbb{P}^{n-1}$ — эквивалентны

$\boxed{\text{Пример}}$

$Gr(k, n)$ — k-мерные линейные подпространств. в $\mathbb{A}^n$

U — k-мерное подпр-во в $\mathbb{A}^n$

$$\downarrow$$

$\{x \mid \mathrm{Im}(x) \leq U\}$ — правый идеал в M_n размерности kn

$\rightsquigarrow$ получаем многообразие правых идеалов размерности kn

$SB_k(A)$ — обобщенное многообразие Севери-Брауэра

$$Gr(k, n) \simeq Gr(n-k, n)$$
$$\downarrow$$
$$SB_k(A) \simeq SB_{n-k}(A^{op})$$

Утверждение: если $SB(A)(F) \neq \varnothing \Rightarrow A \simeq M_n$

$SB_k(A)(F) \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{ind}\, A \mid k$

$A = M_m(D)$, D — тело, $\deg(D) = \sqrt{\dim D}$

$m \cdot \underbrace{\deg(D)}_{\mathrm{ind}(A)} = n$

Скрученные формы $\mathbb{P}^{n-1} \longleftrightarrow$ скруч. формы M_n

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = PGL_n$$

$$\mathrm{Aut}(q_0) = O(q_0)$$

char$\neq 2$ $\quad \mathrm{Aut}(Q_0)^+ = PGO(q_0)$

$H^1(F, PGO(q_0))$ — классы изоморфности центральных простых алгебр с ортогональной инволюцией σ

Идеалы I в (A,σ) размерности $\deg A$
(правые)
такие, что $\sigma(I)\cdot I = 0$ // аналог $q(v)=0$

|| по определению это содержится в $SB(A)$:

$X_{(A,\sigma)} \hookrightarrow SB(A)$. При поднятии до $\overline{F}$ получаем:

$\mathbb{P}_{\overline{F}}^{\deg(A)-1} = SB(A)\otimes_F \overline{F}$

$Q_{\sigma(q)_{\overline{F}}} \to$