Еще раз про аналогию с топологией:

$$\begin{tikzcd} G \curvearrowright E \arrow[d] & \text{— торсор} & U_i \times G \simeq E|_{U_i} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X & & U_i \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

X — топ. пространство, и $\exists$ покрытие $\{U_i\}$:

У нас:

$X = \operatorname{Spec} K$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \end{tikzcd}$$

L/K — расширение полей

$$\begin{tikzcd} E_L \arrow[d] & \simeq & G_L \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} L & & \operatorname{Spec} L \end{tikzcd}$$

Мы хотим описать $H^1(K, G)$

Стратегия: E — торсор, X — G-многообразие (гладкое проективное)

мы определили ${}_E X$ — ${}_E G$-многообразие, гладкое проективное — скрученная форма X, то есть

$E_{\bar K} \simeq G_{\bar K}$ как $G_{\bar K}$-многообразие

$({}_E G)_{\bar K} \simeq G_{\bar K}$ как алг. группа

$({}_E X)_{\bar K} \simeq X_{\bar K}$ и как $G_{\bar K}$-многообразие

$\boxed{\text{Пример}}$ $H^1(K, PGL_n) \ni A$ — центр. простая алгебра, $\deg A = n$

$E = \operatorname{Isom}(M_n, A)$

$X = \mathbb{P}^{n-1}$

$G = PGL_n$

Тогда ${}_E G = \operatorname{Aut}(A)$

${}_E X = SB(A)$ = многообразие правых идеалов в A размерности n

$SB(A)(K) \neq \varnothing \iff A \simeq M_n$

свойства многообразия $SB(A)$ отражают свойства исходного торсора

$\boxed{\text{Пример}}$ $G = O_n$

$H^1(K, O_n) \ni q$ — невырожд. кв. форма ранга n

$E = \operatorname{Isom}(q_0, q)$, где q_0 — расщепима $(\langle 1,-1\rangle \perp \ldots \perp \langle 1,-1\rangle (\perp \langle 1 \rangle))$

$X = \{q_0 = 0\}$ в проективном смысле. Тогда $Q = {}_E X = \{q = 0\}$

$Q(K) \neq \varnothing \iff q = \langle 1,-1\rangle \perp q'$, т.е. q изотропна можно взять любое расширение L/K!

$Q(L) \neq \emptyset \iff q_L = \langle 1, -1 \rangle \perp q''$

$\boxed{\text{Факт}}$ q : $\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_k \rangle$

(*) q_L изотропна $\iff$ q_L расщепима (т.е. раскладывается в сумму $\langle 1, -1 \rangle$)

Наоборот, если $\dim q$ четна и (*) выполнено для любого расширения полей, то q пфистерова. с точностью до скаляра

Если же $\dim q$ нечетна, то $q \perp \langle 1 \rangle$ пфистерова с точностью до скаляра

торсор E $\rightsquigarrow$ многообразие ${}_E X$ $\rightsquigarrow$ инварианты торсора

инварианты в смысле алг. геометрии

здесь можно варьировать X

Пусть X — гладкое проективное

Мы ограничимся случаем, когда X <u>однородное</u>,

то есть $G(\overline{K})$ действует на $X(\overline{K})$ транзитивно

($G \times X \longrightarrow X \times X$ сюрьективно как пучок, а не в категорном смысле:

$(g, x) \longmapsto (gx, x)$

$\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ — эпиморфизм в категории схем)

неформально говоря, у G на X одна орбита

— <u>Проективное однородное многообразие</u>

Как строить проективные однородные многообразия?

G расщепимая V — неприводимое представление

(в $\operatorname{char} K \neq 0$ нужно осторожнее)

$\mathbb{P}(V)$ = многообразие прямых в V, проходящих через 0.

У G на $\mathbb{P}(V)$ есть ровно одна замкнутая орбита

— это и есть наше X

Все проективные однородные многообразия так получается

(но не единственным образом)

$\boxed{\text{Примеры}}$ ① SL_n действует на K^n — <u>векторное представление</u>

u, v — два вектора. Можно ли найти g : $\langle gu \rangle = \langle v \rangle$?

Можно, если $u, v \neq 0$.

Значит, есть две орбиты в K^n: $v = 0$ и $v \neq 0$

В $\mathbb{P}(K^n)$ — только одна орбита

$\quad \| \; \mathbb{P}^{n-1}$

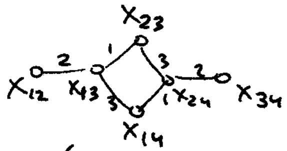
② SL_n действует на $\Lambda^k(K^n)$, $k = 1, \dots, n-1$

На неразложимых поливекторах орбит много,

но на разложимых действие транзитивно.

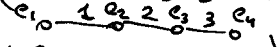
Свойство „быть разложимым" определяется уравнениями Плюккера

$n = 4, k = 2$ $\quad \mathbb{P}(\Lambda^k(K^n))$. Орбита там — это $Gr(k, n)$



— диаграмма Хассе

$(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)\wedge(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3+b_4e_4)$



$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23}$$

Любое X — орбита в $\mathbb{P}(V)$ — задается квадратичными уравнениями в проективных координатах

~~$\forall$ SL_n других однородн~~

$v\in V$, $X=G\cdot\langle v\rangle$.

① $\mathrm{Stab}_G(\langle v\rangle)=P$ — параболическая подгруппа

Проективное однородное многообразие задается P с точностью до сопряженности

② Как на v действует T?

$$T\langle v\rangle=\langle v\rangle \rightsquigarrow \exists\,\lambda: T\longrightarrow \mathbb{G}_m: tv=\lambda(t)v\ \ \forall t\in T$$

вес неприводимого представления V — скаляр

Представление задается своим весом (точнее, (орбитой веса относительно W), но в этой орбите есть единственный доминантный) ?

v — вектор старшего веса

$\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$ — простые корни

$\alpha_i^\vee$: $\alpha_i^\vee(\beta)=\dfrac{2(\alpha_i,\beta)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$

$\alpha_1^\vee,\dots,\alpha_\ell^\vee$ — базис в двойственном пр-ве

$\omega_1,\dots,\omega_\ell$ — двойственный к нему:

$\alpha_i^\vee(\omega_j)=\delta_{ij}$, то есть $\dfrac{2(\alpha_i,\omega_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=\delta_{ij}$

$\omega_1,\dots,\omega_\ell$ — фундаментальные веса (на самом деле ϖ, а не ω)

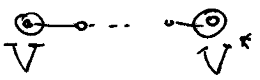
\varpi

$\lambda=\sum m_i\omega_i \qquad m_i\geqslant 0$

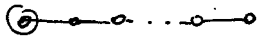
после этого X и P зависит только от того, какие m_i не равны 0.

Проективные однородные многообразия задаются подмножествами вершин на диаграмме Дынкина: те, для которых $m_i\neq 0$ — их мы обводим

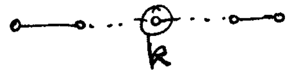
SL_n действует на $\mathrm{Lie}(SL_n)$



$V^*\otimes V\cong \mathrm{End}(V)$


A_{n-1}

ω_1 $\quad V(\omega_1)$ — векторное представление



$A_{n-1} \rightsquigarrow Gr(k,n)$

Если одна вершина обведена

$V = V(\omega_i)$, то P называется <u>максимальной</u>

Если все вершины обведены, то P называется <u>борелевской</u>

(минимальная среди параболических)

$B \leq P \leq G$

любая гладкая замкнутая подгруппа, содержащая B

$\circ - \odot \cdots \odot - \circ - \circ$ SL_n $V = K^n$

$k_1 \cdots k_m$

$X = \{ U_1 \leq \ldots \leq U_m \leq V \mid \dim U_i = k_i \}$ — <u>многообразие флагов</u>

SL_n действует на X транзитивно

$V(\omega_{k_1}) \otimes \ldots \otimes V(\omega_{k_m})$ уже не будет неприводимым,

но можно взять кусок, соотв. весу $\omega_{k_1} + \ldots + \omega_{k_m}$

Для любой G иногда однородное проективное многообразие называют обобщенным флаговым многообразие

$X = \{ P' \leq G \mid P'$ сопряжена с $P \}$

т.е. $X(R) = \{ P' \leq G_R \mid \exists S/R,\ g \in G(S) : gP'g^{-1} = P \}$

гладкая замкнутая подгруппа

${}_EX = \{ P' \leq {}_EG \mid$ над $\overline{K}$ $P'_{\overline{K}}$ сопряжена с $P_{\overline{K}}$ внутри $({}_EG)_{\overline{K}} = G_{\overline{K}} \}$

В ${}_EG$ никакой P может не быть!

X — <u>изотропное</u>, если $X(K) \neq \varnothing$

${}_EG$ — <u>изотропная</u>, если для какого-то проективного однородного многообразия ${}_EX \neq pt$ ${}_EX$ изотропно.

$G = PGL_n$:

${}_EG = Aut(A)$ У PGL_n нет векторного представления

$SB(A)$

$U_1 \leq \ldots \leq U_k$

$I_1 \leq \ldots \leq I_k$, $\dim I_i = n \cdot k_i$

$$\begin{array}{ccc} GL_n & \xrightarrow{\det} & \mathbb{G}_m \\ \wr & \nearrow & \\ GL_1(A) & \xrightarrow{Nrd} & \mathbb{G}_m \\ \| & & \\ A^\times & & \end{array}$$

приведенная норма // reduced norm

$SL_1(A) = \{ g \in A \mid Nrd(g) = 1 \}$

$Nrd(x)^n = \det(y \mapsto xy)$

$$\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_\ell$$
$$\wedge|$$
$$\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_\ell$$

Класс изоморфности внутри класса изогении
задается подрешеткой (с точностью до внешних автоморфизмов)

$\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_\ell$ — присоединенная группа (без центра)

$\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_\ell$ — односвязная группа (самый большой центр)

представление поднимается тогда и только тогда,
когда старший вес лежит в соответствующей решетке