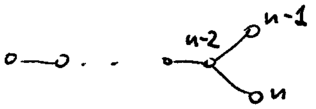
Рассмотрим однородное многообразие для SO_{2n}



D_n

весу ω_1 отвечает квадрика $\{q(v)=0\}$

— соответствует естественному представлению

$\omega_2 \rightsquigarrow$ рассматриваем $\Lambda^2 V$

замкнутая орбита такая:

$\langle u,v\rangle \qquad \{q(u)=q(v)=f(u,v)=0\}$

$f(u,v)=q(u+v)-q(u)-q(v)$

вполне изотропная плоскость

т.е. $q|_{\langle u,v\rangle}=0$

ω_3 — аналогично

$\vdots$

ω_{n-2} — аналогично: вполне изотропные подпространства размерности $n-2$

$\left.\begin{matrix}\omega_{n-1}\\ \omega_n\end{matrix}\right\rangle$ и то, и другое соответствует вполне изотропным подпространствам размерности n

Многообразие вполне изотропных подпространств размерности n имеет две компоненты связности

$e_1,\dots,e_n,e_{-n},\dots,e_{-1}$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & & 1\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}\\ e_1\ \dots\ e_{-1}\end{array}$$

$\langle e_1,\dots,e_{n-1},e_n\rangle$ — ω_{n-1}

$\langle e_1,\dots,e_{n-1},e_{-n}\rangle$ — ω_n

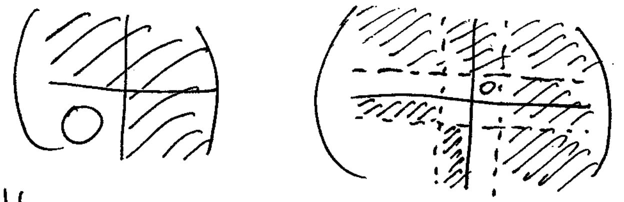
не переводятся друг в друга действием SO_{2n}

Многообразие вполне изотропных подпр-в размерности $n-1$

— не максимальное однородное —

— оно соответствует $\omega_{n-1}+\omega_n$

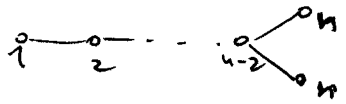
$$\mathrm{Stab}(\langle e_1,\dots,e_{n-1}\rangle)=\mathrm{Stab}(\langle e_1,\dots,e_{n-1},e_n\rangle)\cap \mathrm{Stab}(\langle e_1,\dots,e_{n-1},e_{-n}\rangle)$$



Немаксимальные многообразия соответствуют флагам:

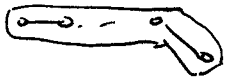
$\omega_{i_1}+\dots+\omega_{i_k}$

Флаг — набор подпространств правильных размерностей:



с инцидентностью:

на  инцидентность = включение

на  — тоже включение

а для ω_{n-1} и ω_n инцидентность означает, что их пересечение имеет размерность $n-1$

Пример геометрии

A_2 $\circ$—$\circ$

ω_1 — точки = параболические подгруппы типа ω_1

ω_2 — прямые = параболические подгруппы типа ω_2

F^3, $\langle u\rangle \leq F^3$

$\mathrm{Stab}_{SL_3}(\langle u\rangle)$ имеет тип ω_1

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(F^3)^*$, $\varphi \in (F^3)^*$

$\mathrm{Stab}_{SL_3}(\langle\varphi\rangle)$ имеет тип ω_2)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad (0\ 0\ 1)$$

отношения между ними:

точка лежит на прямой —

$\varphi(u) = 0$, а в терминах параболических подгрупп:

$\mathrm{Stab}(\langle u\rangle) \cap \mathrm{Stab}(\langle\varphi\rangle)$ содержит борелевскую подгруппу

(= параболич. подгруппу типа $\omega_1+\omega_2$)

можно взять абстрактные аксиомы (Дезаргово ⊂ Паппа)

ассоц. комм.

и получить $SL_1(A)$, A — ц.п.а. $\deg = 3$

$E \in H^1(F, G)$

G-многообразие X (одн. проективное)

$_EX$; считаем инварианты этого многообразия в смысле алгебраической геометрии

Например, $CH^*(_EX)$

$$CH^*(_EX) \longrightarrow CH^*((_EX)_{\bar F}) = CH^*(X_{\bar F})$$

$$\begin{array}{ccc} X_{\bar F} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\,\bar F & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,F \end{array}$$

нас интересует образ этого гомоморфизма

кручение содержится в его ядре, за счёт чего легче жить.

Остаётся подрешётка

① Надо посчитать $CH^*(X_{\bar{F}})$

Примеры

$\mathbb{P}^n$. Рассмотрим $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ (с диагональным действием SL_{n+1})

SL_{n+1} действует нетранзитивно на нем

$$\begin{array}{c} \cancel{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \supset \mathbb{P}^n} \\ (\langle u\rangle, \langle v\rangle) \\ \cancel{\downarrow \mathbb{A}^n} \\ \cancel{\mathbb{P}^n} \end{array}$$

диагональ

дополнение к ~~диагонали~~ расслаивается над $\mathbb{P}^n$ со слоем $\mathbb{A}^n$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \arrow[d, "\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^0"] & \supset \mathbb{P}^n \\ Gr(1,2;n+1) & \end{tikzcd}$$

$(\langle u\rangle, \langle v\rangle) \mapsto$ флаг $(\langle u\rangle \subsetneq \langle u, v\rangle)$

диагональ

дополнение к диагонали расслаивается над $Gr(1,2;n+1)$ со слоем $\mathbb{A}^1$

$Gr(1,2;n+1)$: флаг, состоящий из прямой и плоскости; $(n+1)$-мерное пространство

На $Gr(1,2;n+1)$ есть двумерное векторное расслоение τ_2: над точкой $\langle u\rangle \subsetneq \langle u,v\rangle$ висит плоскость $\langle u,v\rangle$

и есть расслоение τ_1: над точкой $\langle u\rangle \subsetneq \langle u,v\rangle$ висит прямая $\langle u\rangle$

Как дополнить прямую до плоскости? $\rightsquigarrow$ слой $\mathbb{A}^1$.

Теперь зафиксируем везде u

т.е. берем слой над точкой в первой $\mathbb{P}^n$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & \supset pt \\ Gr(1,n) = \mathbb{P}^{n-1} & \end{tikzcd}$$

точная последовательность локализации:

$$CH^{*-n}(pt) \to CH^*(\mathbb{P}^n) \longrightarrow CH^*(\mathbb{P}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

почти всегда $=0$

гомоморфизм колец

Значит, $CH^i(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} CH^i(\mathbb{P}^{n-1}), & i < n \\ \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & i > n \end{cases}$

По индукции получаем, что в каждой размерности от 0 до n стоит одна копия $\mathbb{Z}$.

$\dim V = n+1$ $\qquad SL(V)$ // или $PGL(V), \ldots$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V) \supset \{\varphi(u)=0\} \arrow[d, "\mathbb{A}^n"] \\ \mathbb{P}(V^*) \end{tikzcd}$$

$(\langle\varphi\rangle \quad \langle u\rangle) \mapsto \langle\varphi\rangle$ $\qquad \omega_1+\omega_n$

Зафиксируем φ:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \supset \mathbb{P}^{n-1} \arrow[d, "\mathbb{A}^n"] \\ pt \end{tikzcd}$$

$$CH^{*-1}(\mathbb{P}^{n-1}) \longrightarrow CH^*(\mathbb{P}^n) \longrightarrow CH^*(pt) \longrightarrow 0$$

считаем по индукции и получаем тот же результат

$X \supset Z$ — замкнутое подмногообразие

$X \setminus Z = U$

$$CH^{*-\operatorname{codim}_X Z}(Z) \longrightarrow CH^*(X) \longrightarrow CH^*(U) \longrightarrow 0$$

push-forward $\qquad$ pull-back — гомоморфизм колец

Руками:

0	1	...	n ← коразмерности
$[\mathbb{P}^n]$	$[\mathbb{P}^{n-1}]$		$[pt]$
$\parallel$			
1			

надо доказать, что $[\mathbb{P}^{n-1}]^i = \begin{cases} [\mathbb{P}^{n-i}], & i\le n \\ 0, & i>n \end{cases}$

$[x_0 : \ldots : x_n]$

$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{P}^{n-1}: & x_0=0 \\ \text{другое } \mathbb{P}^{n-1}: & x_1=0 \end{array}\right]$ их пересечение: $x_0=x_1=0 \longleftrightarrow \mathbb{P}^{n-2}$

$SB(D)$, D-тело, $\operatorname{ind} D = n+1$

— скрученная форма $\mathbb{P}^n$

$CH^*(SB(D)) \longrightarrow CH^*(\mathbb{P}^n_{\overline{F}})$ $\qquad$ циклы из образа — <u>рациональные</u> (по отношению к E)

$\mathbb{Z} \quad 0$ — это всегда в образе

$\mathbb{Z} \quad 1$

$\vdots$

$\mathbb{Z} \quad n$

Пусть класс $[pt]$ рационален

Значит, есть конечные (сепарабельные?) расширения $L_1, \dots, L_k$

такие, что ① над каждым L_i наше многообразие имеет рац. точку;

② $\gcd_i([L_i:F]) = 1$

$$\Updownarrow$$

$$[D_{L_i}] \text{ в } Br(L_i) = 0$$

применим трансфер $Br(L_i) \longrightarrow Br(F)$

$\rightsquigarrow [L_i:F]\cdot[D]$ в $Br(F) = 0$

$\rightsquigarrow [D]$ в $Br(F) = 0$

Отсюда можно увидеть, что в степени рациональна

как раз подрешетка, порожденная $\operatorname{ind} D$

По сути, мы нарисовали фильтрацию

$$\underset{\mathbb{A}^n}{\mathbb{P}^n \supset} \underset{\mathbb{A}^{n-1}}{\mathbb{P}^{n-1} \supset} \dots \supset pt$$

, т.е. $\exists\, X \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$ фильтрация замкнутыми подпространствами

$$X_i \setminus X_{i+1} = \coprod \mathbb{A}^{k_i}$$

Такое пространство называется <u>клеточным</u>

① У него все CH^i – свободные кон. пор. абелевы группы (ранг = кол-во клеток)

② $CH(X)_i \simeq CH(X_L)_i \quad \forall\, L/F$.

Квадрика Q

Рассмотрим

$$\underset{(\langle u\rangle,\ \langle v\rangle)}{Q\times Q} \supset \underset{\langle u\rangle \not\perp \langle v\rangle}{\{f(u,v)=0\}} \supset \underset{(\langle u\rangle = \langle v\rangle)}{Q}$$

$\langle u\rangle$, Q, $\mathbb{A}^{\dim Q}$

почему? Пусть $u = e_1$

тогда дополнение $\Leftrightarrow f(u,v) \neq 0$

$\rightsquigarrow$ коэфф. у v при e_{-1} не равен 0

$\rightsquigarrow$ м. считать, что он равен 1

e_1 – однозначно задается из условия изотропности

что угодно

1 e_{-1}

Иначе говоря, рассмотрим тавтологическое расслоение τ и $(\tau^\perp)^*$ $(\langle u\rangle^\perp)^*$

$$\begin{array}{cc} (\tau^\perp)^* & (\langle u\rangle^\perp)^* \\ \downarrow & \downarrow \\ Q & \langle u\rangle \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{A}^{\dim Q} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}((\langle u\rangle^\perp)^*) \setminus \mathbb{P}(\{\varphi \in (\langle u\rangle^\perp)^* \mid \varphi(u)=0\}) \qquad v \longmapsto \varphi : \varphi(w) = f(v,w)}$$

$$\{f(u,v)=0\} \supset Q$$

$\downarrow$ $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}(\tau_2) \setminus \mathbb{P}(\tau_1)$, как и выше.

$$OGr(1,2;f)$$

$\shortparallel$

флаги, состоящие из вполне изотропных подпространств $\langle u\rangle \leqslant \langle u,v\rangle$

Теперь фиксируем u

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, "\mathbb{A}^{\dim Q}"] & \supset \{f(u,v)=0\} & \supset pt \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] \\ pt & & Q' \end{tikzcd}, \quad \dim Q' = \dim Q - 2$$

сечения

$$CH^{*-1}(\{f(u,v)=0\}) \to CH^*(Q) \longrightarrow CH^*(pt) \longrightarrow 0$$

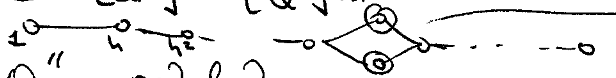
$$CH^{*-\dim Q+1}(pt) \longrightarrow CH^*(\{f(u,v)=0\}) \longrightarrow CH^*(Q') \longrightarrow 0$$

При помощи индукции можно доказать следующее:

$\boxed{I}$ $\dim Q = n$ — четно

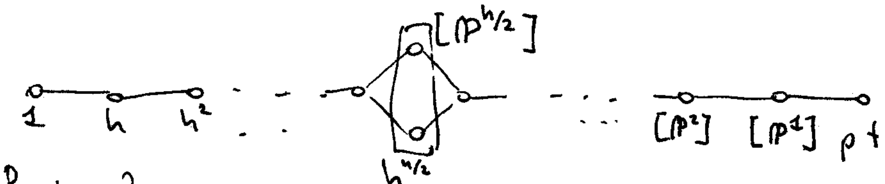
$0 \quad 1 \quad \dots \quad n/2 \quad \dots \quad n$ ← codim

$1 \quad [Q''] \cdots [Q'']^i \dots$



$h^{n/2}$ = сумма двух образующих

Q'' — подквадрика коразмерности 1
= гиперплоское сечение в общем положении



В координатах:

$Q: \ x_1y_1 + \dots + x_{n/2+1}y_{n/2+1} = 0$

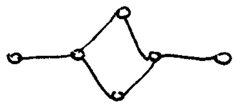
Подквадрики:

- $x_{n/2+1} = y_{n/2+1} = 0 \leftarrow Q''$
- $x_{n/2+1} = 0$
- $\vdots$ и так далее

Дошли до $n/2$:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dots = x_{n/2+1} = 0 \\ x_1 = \dots = x_{n/2} = y_{n/2+1} = 0 \end{array}\right.$$ — два варианта

D_3:



$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$

$\{x_3 = y_3 = 0\}$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 = y_3 = 0 \end{array}\right.} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2 = x_3y_3 = 0} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2 = 0}$$

почему-то эквивалентно $x_3 = y_3 = 0$

М. положить $x_1 = 0$ и получить дивизоры y_1, x_2

У функции y_1/x_2 нуль в y_1 и полюс в x_2 ⟹ они эквивалентны.