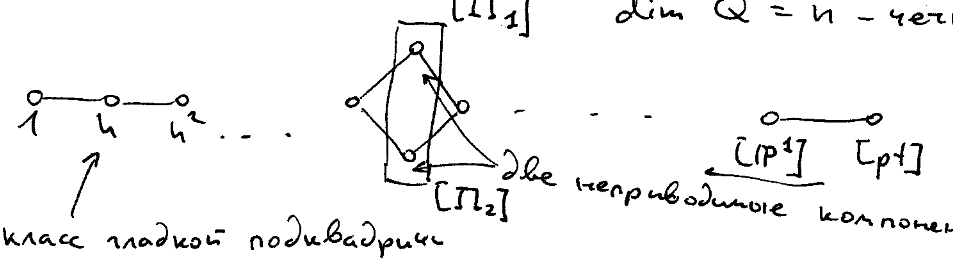
В прошлый раз мы „посчитали" $CH^*(Q)$

$\dim Q = n$ – четное



$$h^{n/2} = \Pi_1 + \Pi_2$$

Что произойдет, если взять нерасщепимую квадрику?

$$E \in H^1(F, O_{2n+2}) \rightsquigarrow {}_E Q$$

Более простой вопрос:

$$CH^*({}_E Q) \xrightarrow{res} CH^*(({}_E Q)_{\bar F})$$

ответ знаем

Что можно сказать про образ этого отображения?
(т.е., про рациональные циклы)

h рационален: можно взять любую гладкую подквадрику коразмерности 1

${}_E Q$ задается ур-нием $q=0$

$$x_1 y_1 + \dots + x_{n/2+1} y_{n/2+1} = 0$$
$$x_{n/2+1} - y_{n/2+1} = 0$$
— было раньше

теперь можно взять любой v: $q(v) \neq 0$,
и $q|_{\langle v\rangle^\perp}$ задает гладкую подквадрику коразмерности 1

Предположим, что q <u>анизотропна</u>, т.е. $q(v) \neq 0$ для $v \neq 0$

<u>Теорема</u> (Спрингер): $[pt]$ не рационален

$[pt]$ рационален $\Leftrightarrow \exists \{E_i/F : \gcd([E_i : F]) = 1$
и над каждым E_i q_{E_i} изотропна

В частности, для некоторого E/F с нечетным $[E:F]$ q_E изотропна
Тогда q изотропна.

В расщепимом случае
$$h \cdot [\mathbb{P}^i] = [\mathbb{P}^{i-1}]$$
$$h \cdot [\Pi_1] = h \cdot [\Pi_2] = [\mathbb{P}^{n/2}]$$

Ответ на вопрос про образ:
если Q анизотропна, то $\mathrm{Im}(CH^k({}_E Q) \to CH^k(({}_E Q)_{\bar F})) =$

$$= \begin{cases} CH^k(({}_E Q)_{\bar F}), & k < n/2 \\ 2 \cdot CH^k(({}_E Q)_{\bar F}), & k > n/2 \\ 2\mathbb{Z}[\Pi_1] + \mathbb{Z}([\Pi_1] - [\Pi_2]), & k = n/2 \end{cases}$$

или 2?

см. Elman, Karpenko, Merkurjev
„Геометрическая теория квадратичных форм."

Если q <u>изотропна</u>, т.е. $\exists v \neq 0 : q(v) = 0$

$$\Rightarrow q = \underbrace{\langle 1, -1 \rangle}_{\text{гиперболическая плоскость}} \perp q'$$

Проитерируем:

$$q \doteq k \cdot \langle 1, -1 \rangle \perp \underbrace{q_{an}}_{\text{анизотропное ядро}}$$

q_{an} и k определены однозначно (q_{an} – с точностью до изометрии)
k – индекс Витта

Тогда $\Downarrow$ $[pt], [\mathbb{P}^1], \ldots, [\mathbb{P}^{k-1}]$ рациональны
и наоборот: если они рациональны, то индекс Витта $\geq k$

Резюме: рациональные циклы на самой квадрике контролируют только индекс Витта

$E \in H^1(F, O_{2n+2})$ $\qquad$ $\underbrace{OGr(2, Q)}_{\text{многообразие вполне изотропных плоскостей}}$

· $Q : \{\langle v \rangle : q(v) = 0\}$

$OGr(2, Q) : \{\langle u, v \rangle \mid q(u) = q(v) = f(u, v) = 0\}$

$$\begin{array}{ccccc}
\underset{\langle u \rangle \;\; \langle v \rangle}{Q \times Q} & \supset & \underset{f(u,v)=0}{X} & \supset & Q \\
\downarrow & & \downarrow \mathbb{A}^n & & \downarrow \mathbb{A}^1 \\
\langle u \rangle & & Q & & \cancel{OGr(2;Q)}\; OGr(1,2;Q)
\end{array}$$

$X \overset{?}{=}$ многообразие ортогональных трансвекций T_{uv}

$$CH^*(Q \times Q) = CH^{*-n}(Q) \oplus$$
$$\oplus CH^{*-n+1}(OGr(1,2,Q)) \oplus CH^*(Q)$$

и все стрелки справа налево задаются явным образом (с помощью pull-back и push-forward)
эквивариантно отн-но $O(q)$

$$OGr(1,2;Q) \xrightarrow{\mathbb{P}^1} OGr(2;Q)$$

Орбиты G на $Q \times Q$ параметризуются двойными смежными классами $W_{P_1} \backslash W / W_{P_2}$

мы смотрели на $CH^*(X) \longrightarrow CH^*(\overline{X})$

посмотрим теперь на мотив Чжоу X

Начинаем с категории гладких проективных многообразий над F

Что в ней плохо? Например, то, что морфизмы нельзя складывать

$$X \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow \Gamma_f \subset X \times Y \rightsquigarrow [\Gamma_f] \in CH_*^*(X \times Y)$$

промежуточный шаг: категория соответствий Cor_F

объекты = гладкие проективные многообразия над F

$Mor(X,Y) = CH^{\dim Y}(X \times Y)$

тождественный морфизм = класс диагонали

$$\begin{tikzcd} & CH^*(X \times Y \times Z) \arrow[dl, "pr_{xy}"'] \arrow[dr, "pr_{yz}"] & \\ CH^{\dim Y}(X \times Y) & pr^*_{xy}(\alpha) \cdot pr^*_{yz}(\beta) \arrow[d, dashed] & CH^{\dim Z}(Y \times Z) \\ & CH^{\dim Z}(X \times Z) & \end{tikzcd}$$

$\alpha \in CH^{\dim Y}(X \times Y)$, $\beta \in CH^{\dim Z}(Y \times Z)$

можно заменить CH на что-то другое, где есть пулбэки и пушфорварды, например, другую теорию когомологий

например, K_0 — получим K-мотивы

$$CH^{\dim Y + \dim Z}(X \times Y \times Z) \ni \beta \circ \alpha = (pr_{xz})_* (pr^*_{xy}(\alpha) \cdot pr^*_{yz}(\beta))$$

это произведение имеет характер свёртки:

например, можно взять в качестве X, Y, Z метрические пространства, а в качестве морфизмов — ядерные операторы

или, в качестве X, Y, Z — конечные множества, морфизмы — матрицы тогда это произведение матриц

В категории соответствий морфизмы можно складывать: это аддитивная категория

Но она не абелева и даже не псевдоабелева

Псевдоабелева: у любого проектора есть образ (в категорном смысле)

$$X \xrightarrow{p} X \qquad p^2 = p$$

$$\Downarrow$$

$X = X_1 \oplus X_2$, p = проекция на X_1

Прямые суммы там есть: $X \oplus Y := X \sqcup Y$

$X \otimes Y := X \times Y$

Есть стандартная процедура, как из аддитивной категории получить псевдоабелеву — пополнение по Каруби — карубизация

По Cor_F построим категорию мотивов Гротендика-Чжоу M:

Объекты: пары (X, p), где $p: X \longrightarrow X$ — идемпотент
неформально, это „образ p"

$Mor((X,p),(Y,q)) = q \circ Mor(X,Y) \circ p$

Есть функтор $\mathrm{Cor} \longrightarrow \mathcal{M}$

$$X \longmapsto (X, id_X)$$

Если X — многообразие, то $M(X) = (X, id_X)$ — мотив X

На самом деле, нужно писать $\mathrm{Cor}_{rat,eff}$ вместо Cor

Обозначения: и Chow_{eff} вместо $\mathcal{M}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SmProj}/_F \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "M"'] & \mathrm{Cor}_{rat}(F) \arrow[r] & \mathrm{Chow}^{eff}(F) \end{tikzcd}$$

M — функтор взятия мотива

$$M(X \sqcup Y) = M(X) \oplus M(Y)$$
$$M(X \times Y) = M(X) \otimes M(Y)$$

Давайте „посчитаем" мотив проективной прямой $M(\mathbb{P}^1)$

$[p] \in CH^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$

Вспоминаем $CH(\mathbb{P}^1)$

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & [pt] \end{array}$$

$$pt \xrightarrow{i} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\pi} pt$$

$\pi \circ i = id_{pt}$, $i \circ \pi =: p$ — идемпотент: $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ отправляет все в точку

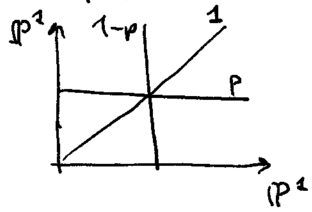
$$\rightsquigarrow M(\mathbb{P}^1) = M(pt) \oplus \underbrace{(\mathbb{P}^1, 1 - [p])}_{\mathbb{L}}$$

Неразложим — $\mathbb{L}$

мотив Лефшеца

аналог аффинной прямой в категории мотивов

графики:



$$\mathbb{P}^1 \supset pt$$
$$\Big| \mathbb{A}^1$$
$$pt$$

$M(pt) =: \mathbb{Z}$

(нейтральный объект относительно $\otimes$)

$\mathbb{L} =: \mathbb{Z}(1)[2]$ Тогда
$\quad\;\; \| \; \mathbb{Z}\{1\}$

$\mathbb{L}^{\otimes k} = \mathbb{Z}(k)[2k]$
$\quad\quad\;\; \| \; \mathbb{Z}\{k\}$

„мотив" k-мерного аффинного пр-ва

часто удается разложить $M(X)$:

$$M(X) = \bigoplus M(Y_i) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k_i}$$

$$M(Y) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k} = M(Y)(k)[2k] = M(Y)\{k\}$$

Пусть есть разложение $M(X) = \bigoplus M(y_i) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k_i}$

Тогда $CH^{*n}(X) = \bigoplus CH^{n-k_i}(y_i)$

Например, $M(\mathbb{P}^1) = M(pt) \otimes M(pt)\{1\}$

$$CH^0(\mathbb{P}^1) = CH^0(pt) = \mathbb{Z}$$
$$CH^1(\mathbb{P}^1) = CH^1(pt) \oplus CH^0(pt) = \mathbb{Z}$$

$CH^n(X) = \mathrm{Mor}(X, \mathbb{L}^{\otimes n})$ — морфизмы в категории мотивов

т.е. CH — представимый функтор

$CH_n(X) = \mathrm{Mor}(\mathbb{L}^{\otimes n}, X)$

т.е. $\mathbb{L}$ играет роль пространства Эйленберга — Маклейна

Умножение:

$$\underset{\alpha}{CH^k(X)} \times \underset{\beta}{CH^n(X)} \xrightarrow{?} CH^{k+n}(X)$$

$$\begin{tikzcd}
M(X\times X) = M(X) \otimes M(X) \arrow[r, "\alpha \otimes \beta"] & L^{\otimes k} \otimes L^{\otimes n} = L^{\otimes(k+n)} \\
M(X) \arrow[u, "M(\Delta)"] \arrow[ur, bend right, "\alpha \cup \beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Теорема (Карпенко) АА, 199?

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset X_{n+1} = \emptyset$$

замкнутые, но не обязательно гладкие

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[d] & X_1 \arrow[d] & \cdots & X_n \arrow[d] \\
Y_0 & Y_1 & \cdots & Y_n
\end{tikzcd}$$

— относительная клеточная фильтрация

гладкие

$$\begin{tikzcd}
X_i \setminus X_{i+1} \arrow[d, "\mathbb{A}^{k_i}"] \\
Y_i
\end{tikzcd}$$

плоский морфизм с аффинными пространствами в качестве слоев

Тогда $M(X) = \bigoplus M(Y_i)\{k_i\} \longrightarrow CH^*(X\times Z) = \bigoplus CH^{*-k_i}(Y_i \times Z)$

функториально

и есть еще одно

$$M(X) = \bigoplus M(Y_i)\{\dim X - \dim Y_i - k_i\}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^1 \setminus pt \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] \\
pt
\end{tikzcd} \rightsquigarrow \quad M(pt) \oplus M(pt)\{1\} \text{ в обеих формулах}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q\times Q & \supset & X & \supset & Q \\ & & \Big\downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \Big\downarrow \mathbb{A}^{1} \\ & & Q & & Gr(1,2;Q) \end{array}$$

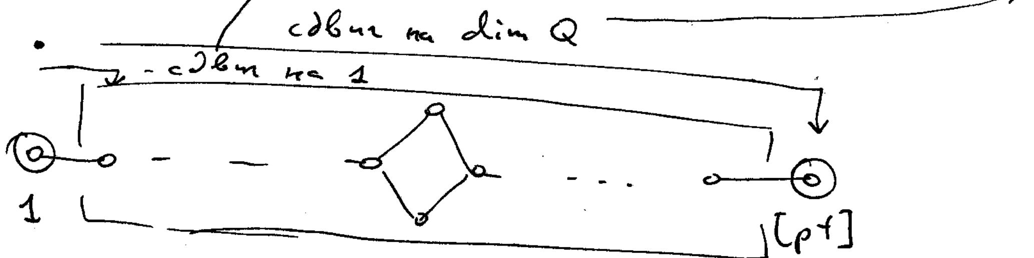
$\rightsquigarrow M(Q\times Q) = M(Q) \oplus M(OGr(1,2,Q)) \oplus M(Q)\{\dim Q\}$

Пусть Q имеет рац. точку $\Longleftrightarrow$ q изотропна

Тогда $\qquad q = \langle 1, -1\rangle \perp q'$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \supset & X' & \supset & pt \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ & & pt & & Q' \longleftrightarrow q' \end{array}$$

$\rightsquigarrow M(Q) = M(pt) \oplus M(Q')\{1\} \oplus M(pt)\{\dim Q\}$



$\rightsquigarrow$ появились проекторы $1\times[pt]$, $[pt]\times 1$, $\Delta_Q - 1\times[pt] - [pt]\times 1$

~~сопр~~ $\{1\}[2]$

$\mathbb{P}^1 = \underset{(1)[1]}{G_m} \wedge \underset{(0)[1]}{S^1}$ соответствует сдвигу в триангулированной категории мотивов Воеводского