26.03.2012

Напоминание:

Гладкие проективные многообразия $/ F$

$\downarrow$

Категория соответствия

(X, p)

$p \in Mor(X, X) \quad p^2 = p$

Категория соответствий $\rightsquigarrow$ категория мотивов Чжоу

– формально добавляем образы проекторов

$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$

все $\mathbb{P}^1$ в одну точку $=: p$. Его образ – точка

$\Delta_{\mathbb{P}^1} - p$ в категории соответствий образа нет

В категории мотивов есть, он называется $\mathbb{L}$ – мотив Лефшеца

$\mathbb{L}$ – $\mathbb{A}^1$, рассматриваемая как проективное многообразие

$M(\mathbb{P}^1) = M(pt) \oplus \mathbb{L}$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1 & \supset & pt & \supset & \emptyset \\ \mathbb{A}^1 \downarrow & & \downarrow \mathbb{A}^1 & & \\ pt & & pt & & \end{array} \rightsquigarrow M(\mathbb{P}^1) = M(pt) \oplus M(pt)\{1\}$$

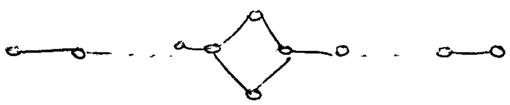
Разложение Брюа показывает, что если G – расщепимая, то $M(G/P) = \oplus \mathbb{Z}\{\ldots\}$

параболическая

При этом $\mathbb{Z}\{i\}$ встречается столько раз, каково количество минимальных представителей классов смежности из W/W_P длины i

 – диаграмма Хассе для $\mathbb{P}^n$

$\rightsquigarrow$ мотив $\mathbb{P}^n$ равен $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\{n\}$

 – квадрика Q, $\dim Q = n$ – четно

$\rightsquigarrow M(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\{\frac{n}{2}\}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}\{\frac{n}{2}+1\} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\{n\}$

Пока что у нас был один прием: мотивные разложения через фильтрации

$$\begin{tikzcd} X = X_0 \supset X_1 \supset \dots & \supset X_n \supset X_{n+1} = \varnothing \\ Y_0 \arrow[from=1-1, "\mathbb{A}^{r_0}"] & Y_n \arrow[from=1-2, "\mathbb{A}^{r_n}"] \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow M(X) = \bigoplus M(Y_i)\{r_i\}$$

Сегодня мы узнаем еще один прием

<u>Метод общей точки</u>

X, Y — многообразия ; Y — неприводимо

Рассмотрим $X_{F(Y)}$ и его кольцо Чжоу $CH^*(X_{F(Y)})$

$$CH^*(X \times Y) \xrightarrow[\text{сюръективно}]{} CH^*(X_{F(Y)})$$

$$\begin{tikzcd} X_{F(Y)} \arrow[r] \arrow[d] & X \times Y \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}(F(Y)) \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

① Доказательство:

Эту диаграмму можно представлять себе как индуктивный предел диаграмм вида

$$CH^*(X \times Y) \xrightarrow[\text{сюръективно из точной последовательности локализации}]{} CH^*(X \times \mathcal{U}),$$ где $\mathcal{U}$ — открытое непустое в Y

$(\operatorname{Spec} F(Y) = \varprojlim \mathcal{U})$ □

Как этим пользоваться?

Если мы хотим найти проектор $p \in CH^{\dim X}(X \times X)$, то

① можно взять $Y := X$, и какой-то элемент из $CH^i(X_{F(X)})$ и поднять его в $CH^i(X \times X)$

② взять какое-то Y, построить элементы из $CH^i(X \times Y)$, $CH^j(Y \times X)$, взять их композицию, и дальше как в пункте (1).

Рациональный цикл:

X — гладкое проективное над $F \rightsquigarrow X_{\bar{F}}$

$$\rightsquigarrow CH^*(X) \xrightarrow{res} CH^*(X_{\bar{F}}) \ni \alpha$$

α — <u>рациональный</u>, если он лежит в образе этого отображения

$$CH^*(X \times X) \longrightarrow CH^*(X_{\bar{F}} \times X_{\bar{F}}) \ni p$$ — здесь уже нет кручения

p — проектор

правая часть гораздо лучше левой

Пусть $p \in CH^*(X_{\bar F} \times X_{\bar F})$ такой, что

① p — проектор — в смысле композиции
② p — рациональный

$\downarrow$

p поднимается до какого-то $\tilde p \in CH^*(X\times X)$.
Вообще говоря, это не проектор.

$$\begin{array}{ccc} & CH^*(X\times Y\times Z) & \\ \swarrow pr_{xy}^*(\alpha) & \downarrow & pr_{yz}^*(\beta) \searrow \\ CH^*(X\times Y) \ni \alpha & & CH^*(Y\times Z) \ni \beta \\ & CH^*(X\times Z) & \end{array}$$

$(pr_{xz})_*(pr_{xy}^*(\alpha)\cdot pr_{yz}^*(\beta))$

— так выглядит композиция

Теорема нильпотентности Роста

Если X - проективное однородное многообразие, p - рациональный проектор $\rightsquigarrow$ он поднимается до проектора $\tilde p$

Более сильное утверждение:

$$\mathrm{Ker}\left(CH^*(X\times X) \longrightarrow CH^*(X_{\bar F}\times X_{\bar F})\right)$$

состоит из нильпотентных (в смысле композиции) элементов

как выглядят очевидные элементы $CH^*(X\times X)$?
Возьмем $\alpha \in CH^*(X)$, $b \in CH^*(X)$ $\rightsquigarrow$ есть $a\times b$ ($\in$)
Тогда есть формула (упражнение!)

$$(a\times b)\circ(c\times d) = \deg(ad)(c\times b)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Y \longrightarrow pt \\ \deg: CH_*(Y) \longrightarrow CH_*(pt) \end{array}}$$

Упражнение R — коммутативное кольцо, I — идеал, состоящий из нильпотентов $\rightsquigarrow$ любой проектор в R/I поднимается до проектора в R

$\boxed{\text{Опр.}}$ X называется клеточным, если существует фильтрация

$$\begin{array}{ccccccccccc} X = X_0 & \supset & X_1 & \supset & X_2 & \supset & \cdots & \supset & X_n & \supset & X_{n+1} = \varnothing \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & pt & & pt & & & & pt & & pt \end{array}$$

в которой все базы — точки

Например, разложение Брюа говорит, что если G расщепимая группа, то G/P клеточное.

В этой ситуации $M(X) = \bigoplus \mathbb{Z}\{r_i\}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ X называется клеточным над общей точкой (generically cellular), если $X_{F(X)}$ клеточное.

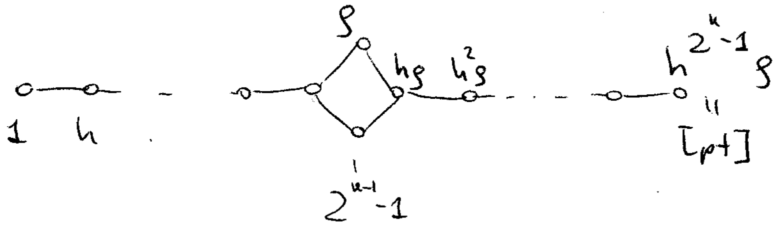
$\boxed{\text{Пример}}$ Квадрика Пфистера: $\langle 1,-a_1\rangle\otimes\cdots\otimes\langle 1,-a_k\rangle = \langle\langle a_1,\dots,a_k\rangle\rangle$ — Q

k-кратная форма Пфистера

2^k — размерность пр-ва; $\dim Q = 2^k-2$

Тогда Q — generically cellular

Обратно, все анизотропные четномерные квадрики, клеточные над общей точкой, так выглядят



$$\begin{tikzcd}
\alpha \in CH^*(Q\times Q) \arrow[r] \arrow[d, "res"'] & CH^*(Q_{F(Q)}) \ni \rho \arrow[d, "\wr"] \\
\bar\alpha \in CH^*(Q_{\bar F}\times Q_{\bar F}) \arrow[r] & CH^*(Q_{\bar F(Q)}) \ni \bar\rho
\end{tikzcd}$$

знаем, как выглядит эта стрелка!

Возьмем $\rho \in CH^*(Q_{F(Q)})$

Поднимаем его до какого-то элемента $\alpha \in CH^*(Q\times Q)$

За α мы не умеем следить, зато знаем, что $\bar\alpha$ переходит в $\bar\rho$

Прообраз $\bar\rho$ выглядит так:

$$\bar\rho\times 1 + (\dots)\times h + (\dots)\times h^2 + \dots + (\dots)\times h^{2^k-1} + (\dots)\times\bar\rho$$

$$\downarrow$$

$$\bar\rho\times 1 + c_1 h^{2^{k-1}-2}\times h + c_2 h^{2^{k-1}-3}\times h^2 + \dots + c_{2^{k-1}-1}\, 1\times h^{2^{k-1}-1} + c\cdot 1\times\bar\rho$$

содержится в образе res, поскольку h рационален.

Поэтому осталось

$$\bar\rho\times 1 + c\cdot 1\times\bar\rho$$

Для клеточных многообразий работает формула Кюннета:

$$CH^*(X\times Y) \cong CH^*(X)\otimes CH^*(Y),$$

если одно из них клеточное. Т.е. любой элемент $CH^*(X\times Y)$ ~~имеет вид~~ есть лин. комбинация $a\times b$, где $a\in CH^*(X)$, $b\in CH^*(Y)$

При этом при отображении

$$CH^*(X)\otimes CH^*(X) = CH^*(X\times X) \longrightarrow CH^*(X_{F(X)}) \cong CH^*(X)\otimes CH^*(\operatorname{Spec}F(X))$$

$$a\times b \longmapsto \varepsilon(b)a$$

$\varepsilon: CH^0 \longrightarrow CH^0$

$CH^{>0} \longrightarrow 0$

$X \longleftarrow \operatorname{Spec}F(X)$

$CH^*(X) \xrightarrow{\varepsilon} CH^*(\operatorname{Spec}F(X))$

$\longleftarrow$ можно подправить прообраз $\bar\rho$ до такого

$2\bar\rho$ тоже рационален: Q расщепляется квадратичным расширением, например, $F(\sqrt{a_1})$

$$\begin{tikzcd}
CH^*(Q) \arrow[r, shift left] \arrow[d] & CH^*(Q_{F(\sqrt{a_1})}) \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
CH^*(Q_{\bar F}) \arrow[r, shift left] & CH^*(Q_{\bar F(\sqrt{a_1})}) \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Либо $\bar\rho\times 1$ рационален, либо $\bar\rho\times 1 + 1\times\bar\rho$ рационален

Предположим, что $\bar\rho\times 1$ рационален. Покажем, что если Q анизотропна, то получим противоречие.

$\rightsquigarrow \bar\rho\times 1,\ 1\times\bar\rho$ рациональны $\rightsquigarrow (\bar\rho\times 1)\cdot(1\times\bar\rho) = \bar\rho\times\bar\rho$ рационален

$\rightsquigarrow \bar h\times 1,\ 1\times\bar h$ тоже рациональны $\rightsquigarrow \overline{pt\times pt}$ тоже рационален

→ берем пуш-форвард при первой проекции

$$CH^*(\overline{Q}\times\overline{Q}) \longrightarrow CH^*(\overline{Q})$$

$$\overline{pt}\times\overline{pt} \longmapsto \overline{pt} \text{ – тоже рациональна}$$

На $CH^*(Q)$ тогда есть 0-цикл степени 1

→ по т. Спрингера на Q есть рациональная точка,
т.е. Q изотропна

Значит, на самом деле $\overline{g}\times 1 + 1\times\overline{g}$ рационален

Из него можно изготовить кучу проекторов

$\overline{h}^i\overline{g}\times\overline{h}^j + \overline{h}^i\times\overline{h}^j\overline{g}$ — тоже рационален

Хотим, чтобы это был проектор

$\operatorname{Codim}\overline{g} = 2^{k-1}-1 \rightsquigarrow j = 2^{k-1}-1-i$

Оказывается, этого достаточно:

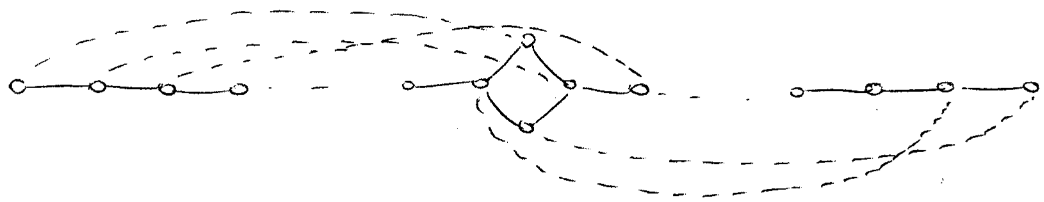
Вспоминаем, что $(a\times b)(c\times d) = \deg(ad)\, c\times b$

→ $\overline{h}^{2^{k-1}-1}\overline{g} = \overline{pt}$

После перемножения получаем

$\overline{h}^i\overline{g}\times\overline{h}^{2^{k-1}-1-i} + \overline{h}^i\times\overline{h}^{2^{k-1}-1-i}\overline{g}$, остальные члены уходят

. Получили $2^{k-1}-1$ проекторов



$$M(\overline{Q}) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\{1\}\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}\{2^{k-1}-1\}^{\oplus 2}\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}\{2^k-2\}$$

Над базой они объединяются в пары

$\boxed{\text{Упр.}}$ R — коммутативное кольцо, I — идеал, состоящий из нильпотентов

→ обратимый элемент из R/I поднимается до обратимого из R

Первый проектор из этих называется <u>мотивом Роста</u> R

$\overline{R} = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\left\{\frac{2^{k-1}-1}{2-1}\right\}$ — над замыканием

Мы „доказали", что мотив квадрики Пфистера составлен из сдвигов мотивов Роста

$$M(Q) = R\oplus R\{1\}\oplus\dots\oplus R\{2^{k-1}-1\}$$

$(a\times b)_*(c) = \deg(ac)\, b$

$R \simeq R'$ в категории мотивов $\Longleftrightarrow \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle \simeq \langle\langle a_1', \ldots, a_n' \rangle\rangle$

$$\Updownarrow$$

$$(a_1) \cup \ldots \cup (a_n) \in H^n(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Обратно, если мотив выглядит как $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\}$ над замыканием, то это мотив Роста (т. Семенова)