02.04.2012

Еще один пример: F_4

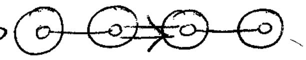
Над замкнутым полем $F_4 = \mathrm{Aut}(H_3(\mathbb{O}))$

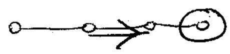
эрмитовы матрицы 3 на 3 над октонионами

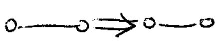
"конструкция по модулю 2"

В общем случае вместо $\mathbb{O}$ нужно взять другие октонионы (они задаются формой Пфистера $\langle\langle a, b, c\rangle\rangle$) и диагональную эрмитову форму $\langle 1, -d, -e\rangle$; $a, b, c, d, e \in F^*/(F^*)^2$,

Если у поля нет расширений нечетной степени, то любая группа F_4 так выглядит

Например, над $\mathbb{R}$: (1) расщепимые октонионы $\rightsquigarrow$ 

(2) компактные октонионы (октавы) и $d=e=1$ 

(3) октавы и $d=e=-1$ $\rightsquigarrow$ анизотропная (над $\mathbb{R}$ — компактная) 

По общей теории скрученных форм над любым полем скрученная форма $F_4 = \mathrm{Aut}(J)$, где J — скрученная форма $H_3(\mathbb{O})$ как йордановой алгебры

"конструкция по модулю 3"

Пусть D — центральная простая алгебра степени 3

Они все циклические $\rightsquigarrow$ $D = (a, b)_3 = \langle x, y \mid x^3 = a, y^3 = b, xy = \zeta yx\rangle$, $\zeta^3 = 1$

$a, b \in F^*/(F^*)^3$

$c \in (F^*)/(F^*)^3$

$\rightsquigarrow$ на $\underset{\alpha}{D} \oplus \underset{\beta}{D} \oplus \underset{\gamma}{D}$ можно завести структуру йордановой алгебры (там где-то будет фигурировать c в качестве параметра) $J(a, b, c)$

Ее норма $N(\alpha\oplus\beta\oplus\gamma) = \mathrm{Nrd}(\alpha) + c\,\mathrm{Nrd}(\beta) + c^{-1}\mathrm{Nrd}(\gamma) - \mathrm{Trd}(\alpha\beta\gamma)$

$\mathrm{Aut}(N)$ — группа типа E_6

Подгруппа, сохраняющая $1 = 1\oplus 0\oplus 0$ — группа типа F_4

Гипотеза Серра – Роста (ослабленный вариант):

Эта группа типа F_4 зависит только от $\{a, b, c\} \in K_3^M(F)/3$

$$\cup\!\!\!\!\! \quad (a)\cup(b)\cup(c) \in H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

Известно, что если $J(a, b, c) = J(a', b', c')$, то $\{a, b, c\} = \{a', b', c'\}$

Если у поля нет квадратичных расширений, то любая J выглядит как $J(a, b, c)$

Для любого поля F определен инвариант

$$g_3 : H^1(F, F_4) \longrightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

(1) Если у F нет квадратичных расширений, то образ — в точности чистые символы $(a)\cup(b)\cup(c)$

② В этом случае ядро тривиально

③ Гипотеза состоит в том, что оно инъективно.

Мы построили $J(a,b,c)$ и $G = \mathrm{Aut}(J(a,b,c))$

<u>Факт:</u> G или расщепимая, или анизотропная (как и в $\underbrace{\text{случае}}_{\text{группы изометрий}}$ пфистеровых форм)

~~Равносильно~~ В частности, если X — G-однородное проективное многообразие, то есть над общей точкой, то оно является клеточным

$X_{F(X)}$ клеточное: есть фильтрация $X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_n \supset X_{n+1} = \varnothing$ с аффинными слоями:

$$\begin{array}{cccc} X_0 & X_1 & X_n & X_{n+1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ pt & pt & pt & pt \end{array}$$

то есть, последовательные разности — аффинные пространства

Возьмем X = скрученная форма F_4/P_4 

историческое отступление

$$M(\xi(G_2/P_1)) \cong \underbrace{M(\xi(G_2/P_2))}_{\dim = 5} \quad (\text{J.-P. Bonnet})$$

$\uparrow$ квадрика, макс. сосед квадрики Пфистера $\rightsquigarrow$ раскладывается в <u>мотивы Роста</u>

$G_2 = \mathrm{Aut}(O)$, O задается «a, b, c»

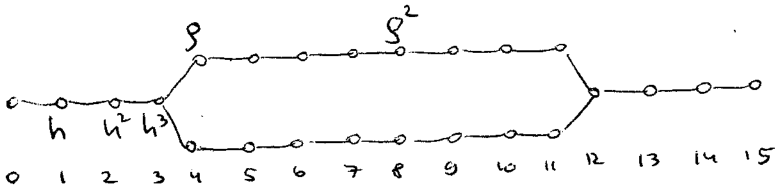
мотив Роста, отвечающий «a, b, c»

Вопрос: а если взять F_4/P_1 и F_4/P_4? У них тоже одинаковая размерность и мн-н Пуанкаре

$M(\xi(F_4/P_1)) \cong M(\xi(F_4/P_4))$ — Зайнуллин, Николенко, Семенов

если $F_4 = \mathrm{Aut}(J(a,b,c))$

Диаграмма Хассе F_4/P_4 $\qquad \dim(F_4/P_4) = 15$



и еще какие-то ребра внутри

① Берем образующую в $CH^1(F_4/P_4)$. Она рациональна, то есть лежит в образе $CH^1(\xi(F_4/P_4)) \xrightarrow{res} CH^1(F_4/P_4)$

В F_4 решетка весов совпадает с решеткой корней, в частности, ω_4 — корень

② h^2, h^3 — образующие CH^2 и CH^3. (2,5) h^4, ρ — базис для CH^4

③ $\rho^2 h^7 = [pt] \bmod 3$

Вся эта информация — над алгебраическим замыканием

④ $X_{F(X)}$ — клеточное $\longleftarrow$ это информация про ξ

⑤ Если $\mathrm{Aut}(J(a,b,c))$ расщепляется над расширением степени, взаимно простой с 3, то она и была расщепимой (теорема типа Спрингера)

Начинаем применять метод общей точки:

$$\begin{tikzcd} CH^*(X\times X) \arrow[r] \arrow[d, "res"'] & CH^*(X_{F(X)}) \arrow[d, "res", "\wr"'] \\ CH^*(X_{\bar F}\times X_{\bar F}) \arrow[r] & CH^*(X_{\bar F(X)}) \end{tikzcd}$$

изоморфизм, поскольку $X_{F(X)}$ — клеточное

ρ — поднимаем до элемента $CH^*(X\times X)$

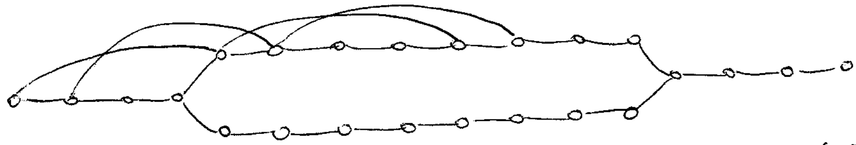
1) В $CH^*(X_{\bar F}\times X_{\bar F})$ есть рациональный элемент вида
$$\alpha=\rho\times 1+?\cdot h^3\times h+?h^2\times h^2+?h\times h^3+?1\times h^7+c\cdot 1\times\rho$$
— это метод общей точки

2) Подправляем α на рациональные элементы (степени h)
$\rightsquigarrow$ можем оставить только $\rho\times 1+c\cdot 1\times\rho$
Поскольку X над кубическим расширением становится клеточным, можно считать, что $c=0$ или ± 1.

Почему $c\neq 0$?
Если $\rho\times 1$ рациональный, то и $1\times\rho$ рациональный
$\rightsquigarrow \rho^2\times\rho^2$ рациональный $\rightsquigarrow h^7\rho^2\times h^7\rho^2$ рациональный
$\rightsquigarrow pt\times pt$ рационально
- Применяем пуш-форвард $\rightsquigarrow pt\in CH^*(X_{\bar F})$ рациональна - противоречие

$\rightsquigarrow \rho\times 1\pm 1\times\rho$ рационален
$\rightsquigarrow \rho^2\times 1\pm 2\rho\times\rho+1\times\rho^2$
$\rightsquigarrow \beta:=\rho^2\times 1\mp\rho\times\rho+1\times\rho^2$ — рационален

Будем умножать на $h^i\times h^j$, $i+j=7$
$$h^i\rho^2\times h^j\mp h^i\rho\times h^j\rho+h^i\times h^j\rho^2\in CH^{15}(X_{\bar F}\times X_{\bar F})$$
Возьмем его композицию с самим собой: $h^{i+j}\rho^2\equiv pt \pmod 3$
пока что считаем все по модулю 3
$$\rightsquigarrow h^i\rho^2\times h^j+h^i\rho\times h^j\rho+h^i\times h^j\rho^2$$
— эта штука уже проектор mod 3
Над замыканием каждое слагаемое — проектор (но не рациональный!)



Правые части этих восьми проекторов (всего 24 штуки) образуют базис группы Чжоу, но не тот, который у нас был раньше (клетки Шуберта)

Получили 8 ортогональных проекторов $P_0, \dots, P_7$

Можно рассмотреть $\beta(h^i \times h^j)$, но теперь i, j — произвольные

Такие рациональные циклы индуцируют изоморфизмы между $(X, P_0)\{i\}$ и (X, P_i)

Мы посчитали по модулю 3, но можно добиться и целочисленных проекторов; на самом деле при каких-то условиях можно всегда поднять проекторы (и изоморфизмы) по модулю 2 и 3 до целочисленных.

$R_{2,k}(\{a_1, \dots, a_k\})$ — мотив Роста

$(X, p_0) =: R_{3,3}(\{a, b, c\})$

Следствие

$$M(X) = \bigoplus_{i=0}^{7} R_{3,3}(\{a, b, c\})\{i\}$$

Замечание

Точно так же доказывается, что

$$M(\xi(F_4/P_1)) = \bigoplus_{i=0}^{7} R_{3,3}(\{a, b, c\})\{i\}$$

Более того, мотив любого G-однородного проективного Y раскладывается в сумму сдвигов $R_{3,3}(\{a, b, c\})$

— для квадрики Пфистера верно аналогичное замечание

Теорема (Зайнуллин — Петров — Семенов)

G — полупростая алгебраическая группа над F

X — G-однородное проективное многообразие, клеточное над общей точкой; p — простое число

Тогда $M(X) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longleftarrow$ нужно брать $\operatorname{Mor}(X, Y) = CH^{\dim Y}(X \times Y)/p$

$\cong$

сумма $R_p(G)$ с какими-то сдвигами,

где $R_p(G)$ не зависит от X и неразложим по модулю p.

Замечания ① „$X_{F(X)}$ клеточное" можно заменить на „$G_{F(X)}$ расщепима"

② $R_p(G)$ над алгебраическим замыканием раскладывается в сумму $\mathbb{Z}/p =: M(pt) \otimes \mathbb{Z}/p$ со сдвигами, и есть некоторая формула для сдвигов

③ Все ситуации, описанные в теореме, перечислены в работе Петрова — Семенова

④ Сами проекторы можно поднять до $\mathbb{Z}$, но не изоморфизмы между ними

(5) Если G не содержит сомножителей типа A и $p \neq 2, 3, 5$, то $R_p(G) = \mathbb{Z}/p$; $p = 5$ возникает только для E_8

(6) $M(X) \otimes \mathbb{Q}$ раскладывается в $M(pt) \otimes \mathbb{Q}$ со сдвигами

$G = E_8$, $p = 2$, инв. Роста тривиален $\rightsquigarrow$ все G-однородные проективные X подходят; $R_2(G)$ — мотив Роста, отвечающий 5-символу

// см. работу Семенова про конечные подгруппы E_8