09.04.2012

${}_\xi G, p \rightsquigarrow R_p({}_\xi G)$ // G — расщепимая, $\xi \in H^1(F, G)$

т.ч. если X — проективное ${}_\xi G$-однородное, клеточное ~~расщепимое~~ над общей точкой, то

$$M(X)\otimes \mathbb{Z}/p = \bigoplus R_p({}_\xi G)\{\ldots\}$$

в категории Cor_p $Mor(X, Y) = CH^{\dim Y}(X\times Y)/p$

Остался открытым вопрос, каков размер $R_p({}_\xi G)$:

$$R_p({}_\xi G)_{\bar F} = \bigoplus \mathbb{Z}/p\{\ldots\}$$

как посчитать эти сдвиги? Можно закодировать их многочленом:

$$\bigoplus \mathbb{Z}_p\{i\}^{\oplus a_i} \rightsquigarrow \sum a_i t^i \text{ — \underline{полином Пуанкаре}}$$

$$P(R_p(G), t)$$

это помогает нам посчитать образ

$$X \longleftarrow X_{\bar F}$$

$$CH^*(X)/p \longrightarrow CH^*(X_{\bar F})/p$$

$J_p({}_\xi G)$ — J-инвариант — набор целых чисел:

1. $P(R_p({}_\xi G), t)$ выражается через $J_p({}_\xi G)$
2. $J_p({}_\xi G)$ контролирует, какие ${}_\xi G$-однородные проективные многообразия действительно являются клеточными над общей точкой
3. Для многих исключительных групп $J_p({}_\xi G)$ выражается через индекс Титса

Пусть $B \leqslant G$ — борелевская

Рассмотрим „последовательность" чего-то

$$B \longrightarrow G \longrightarrow G/B \longrightarrow BB$$

$$BB = pt/\!/B$$

переходим к кольцам Чжоу

$$CH^*(BB) \longrightarrow CH^*(G/B) \longrightarrow CH^*(G) \longrightarrow CH^*(B) = \mathbb{Z}$$

— точная последовательность градуированных колец

$CH^*(G/B) \to CH^*(G)$ — сюръекция

$$\sim CH^*(BB) \longrightarrow CH^*(G/B) \longrightarrow CH^*(G)$$

$$CH^*(BB) = \mathbb{Z}[X^*(T)] = S^*(X^*(T))$$

$X^*(T)$ — характеры тора

S^* — симметр. алгебра

$$B = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} = \mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m$$

гомотопически эквивалентно

Что такое $B\mathbb{G}_m$?

$\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{G}_m$ — первое приближение

$\varinjlim_n \mathbb{P}^n = B\mathbb{G}_m$

$CH^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[x]/_{(x^{n+1})}$

$\rightsquigarrow CH^*(B\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}[x]$ — проективный предел в категории градуированных колец (но не в категории колец)

Пусть $\chi_1, \dots, \chi_\ell$ — базис решетки $X^*(T)$

Если G односвязна, можно взять $\omega_1, \dots, \omega_\ell$

Если G присоединенная — $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$.

Тогда $S^*(X^*(T)) = \mathbb{Z}[\chi_1, \dots, \chi_\ell]$

Чтобы построить отображение $CH^*(BB) \longrightarrow CH^*(G/B)$, достаточно задать образы χ_i

Положим $\chi_i \longmapsto [L_{\chi_i}]$ — класс L_{χ_i} в группе Пикара

— линейное расслоение на G/B

$\chi_i : B \longrightarrow \mathbb{G}_m$

$G \times_B \mathbb{A}^1 = L_{\chi_i}$ (действие на $\mathbb{A}^1$ — с помощью χ_i)

$\downarrow$

$G \times_B pt = G/B$

(пока что G расщепимая)

(Если подкрутить на ξ, все $[L_{\chi_i}]$ останутся рациональными)

Например, $\mathbb{P}^1 = SL_2/B$

$$\begin{array}{ccc} \ell & \hookrightarrow & \mathcal{O}(-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\ell\} & \in & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Рассмотрим $SL_2 \times_B \mathbb{A}^1$ с действием: $B \ni \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ — умножение на α

$\begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \overset{\chi}{\longmapsto} \alpha \in \mathbb{G}_m$

$\begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \overset{\chi^{-1}}{\longmapsto} \alpha^{-1} \in \mathbb{G}_m$

Упражнение: $L_\chi = \mathcal{O}(-1)$

$L_{\chi^{-1}} = \mathcal{O}(1)$

В G/B есть клетки Шуберта коразмерности 1. Пусть G односвязна.

Они соответствуют фундаментальным характерам:

$\chi_i \longmapsto$ i-ая клетка Шуберта коразмерности $1 = c_1(L(\chi_i))$

Теперь взяли $\xi \in H^1(F, G)$

${}_\xi(G/B)$ — всегда многообразие, клеточное над общей точкой

(при переходе к его полю функций у G появляется борелевская подгруппа $\rightsquigarrow$ можно нарисовать фильтрацию

$$CH^*({}_\xi(G/B)) \xrightarrow{res} CH^*(G/B)$$

хотим следить за образом этого отображения.

Все, что приходит с $CH^*(BB)$, лежит в образе res, поскольку линейные расслоения можно скрутить:

$$[{}_\xi L_\chi] \longmapsto [L_\chi]$$

Точность сохранится при факторизации по p

$$\begin{array}{ccccc} CH^*(BB)/_p & \longrightarrow & CH^*(G/B)/_p & \longrightarrow & CH^*(G)/_p \\ \parallel & & & & \\ \mathbb{Z}/_p[x_1,\dots,x_e] & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} G\times G \longrightarrow G \\ \Downarrow \\ CH^*(G) \longrightarrow CH^*(G)\otimes CH^*(G) \end{array} \rightsquigarrow CH^*(G) \text{ — алгебра Хопфа}$$

$CH^*(G)/_p$ — алгебра Хопфа, градуированная, конечномерная, связная, коммутативная над $\mathbb{Z}/_p$

$(CH^0/_p = \mathbb{Z}/_p)$

Теорема: Все такие алгебры Хопфа как алгебры выглядят так: $\mathbb{Z}/p[x_1,\dots,x_r]/(x_i^{p^{k_i}})$

Если X — клеточное над $\mathbb{C}$, можно сравнить $CH^*(X)$ и $H^*_{sing}(X)$

Оказывается, $CH^i(X) = H^{2i}_{sing}(X)$

Для G над $\mathbb{C}$ есть нетрив. элементы в $H^{2i+1}_{sing}(G)$

Например, $G = SL_2(\mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C}) \sim S^3$

Замечание Если $p \neq 2,3,5$ и G не изогенична SL_n, то $CH^*(G)/p = \mathbb{Z}/_p$. $p=5$ возникает только для E_8

(делители числа Коксетера) $p=3$ — F_4, E_6, E_7, E_8

Таблица Каца дает для каждой G и для каждого p значения k_i и степени x_i: $\deg(x_i) =: d_i$

$$\begin{tikzcd} & CH({}_\xi(G/B))/_p \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ CH^*(BB)/_p \arrow[r] \arrow[ur] & CH^*(G/B)/_p \arrow[r] & CH^*(G)/_p \end{tikzcd}$$

хотим проследить за образом верт. стрелки здесь

$CH^*(G)/_p = \mathbb{Z}/_p[x_i]/(x_i^{p^{k_i}})$

торсор, а не группа

${}_\xi(G/B) = ({}_\xi G)/_B$, поэтому

$${}_\xi G \longrightarrow ({}_\xi G)/_B \longrightarrow BB$$

это дает стрелку

$$CH^*(BB)/_p \longrightarrow CH({}_\xi(G/B))/_p$$

j_i — наименьшее целое число такое, что

$x_i^{p^{j_i}}$ + члены меньшего порядка $\in \operatorname{Im}\varphi$

Порядок — Deglex: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_r$ согласованно со степенями:
$d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_r$

$CH^*(G)/p$ — комодуль над собой $\rightsquigarrow \operatorname{Im}\varphi$ — подкомодуль (?)

$0 \leq j_i \leq k_i$, т.к. $x_i^{p^{k_i}} = 0$

$j_i = 0 \Leftrightarrow$ сам x_i + члены меньшего порядка $\in \operatorname{Im}\varphi$

$(j_i) =: J_p(\xi)$ — на самом деле, он зависит от ξ, а не только от ${}_\xi G$

$$P(R_p(G), t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1 - t^{p^{j_i} \cdot d_i}}{1 - t^{d_i}}$$

<u>Пример:</u> • F_4, $p = 3$

$$\mathbb{Z}/3\,[x_1]/(x_1^3)$$
$\uparrow$
$\deg x_1 = 4$

<u>Замечание:</u> $J_p(\xi) = 0 \Leftrightarrow {}_\xi G$ расщепляется расширением степени взаимно простой с p

$\rightsquigarrow (0)$ — неинтересно

(1): $\dfrac{1 - t^{3 \cdot 4}}{1 - t^4} = 1 + t^4 + t^8$

• G_2, $p = 2$

$$\mathbb{Z}/2\,[x_1]/(x_1^2)$$
$\uparrow$
$\deg x_1 = 3$

(0) — неинтересно

(1): $\dfrac{1 - t^{2 \cdot 3}}{1 - t^3} = 1 + t^3$ — $R_2({}_\xi G)$ — мотив Роста

• F_4, E_6, $p = 2$ — ответ тот же, что и для G_2

• E_6^{sc}, E_7, $p = 3$ — тот же, что и для F_4, $p = 3$

$cd_p(X) =$ степень $P(R_p(G), t) = \sum (p^{j_i} - 1) d_i$

$=$ наименьшая из размерностей рациональных циклов

• E_8, $p = 5$

$$\mathbb{Z}/5\,[x_1]/(x_1^5)$$
$\uparrow$
$\deg x_1 = 6 = 5 + 1$

$\dfrac{1 - t^{5 \cdot 6}}{1 - t^6}$

В этом случае все ${}_\xi G$-однородные проективные многообразия являются клеточными над общей точкой

// $\deg x_1 = p + 1$, если $r = 1$

• E_8, $p=2$

$$\mathbb{Z}/2\,[x_1, x_2, x_3, x_4] \big/ (x_1^8, x_2^4, x_3^2, x_4^2)$$

$\deg x_1 = 3$ $\deg x_2 = 5$, $\deg x_3 = 9$, $\deg x_4 = 15$

получаются операцией Стинрода из x_1

$\deg S^m(x) = \deg x + m \cdot (p-1)$

$m = \deg x \rightsquigarrow S^m$ – возведение в степень p.

$m > \deg x \rightsquigarrow S^m(x) = 0$

Здесь $x_2 = S^2(x_1)$, $x_3 = S^4(x_2)$

1) S^m линейны

2) $S^m(xy) = \sum\limits_n S^n(x)\, S^{m-n}(y)$ // $\rightsquigarrow \sum\limits_m S^m$ – гомоморфизм колец

3) Adem relations

Что это означает для $J_p(\xi)$?

j_1, j_2, j_3, j_4: $0 \leq j_1 \leq 3$

$0 \leq j_2 \leq 2$

$0 \leq j_3, j_4 \leq 1$

Из свойств S^m следует, что $j_1 \geq j_2 \geq j_3$

Кроме того, $j_1 \leq j_2 + 1$, $j_2 \leq j_3 + 1$

Если $j_1 = 3$, то $j_2 = 2$, $j_3 = 1$

Если $j_1 = 0$, то $j_2 = 0$, $j_3 = 0$ $\rightsquigarrow$ интересная ситуация,

когда при этом $j_4 = 1$

Тогда $P(R_2(\xi G), t) = \dfrac{1 - t^{2 \cdot 15}}{1 - t^{15}} = 1 + t^{15}$

| $j_1 = 0 \rightsquigarrow$ инвариант Роста mod 2 тривиален

– как у мотива Роста

Никита Семенов доказал, что это и есть мотив Роста

$\rightsquigarrow$ получается инвариант в $H^5(F, \mathbb{Z}/2)$