Набросок доказательства теоремы Зайнуллина–Петрова–Семенова $\boxed{16.04.2012}$

① „Теорема Крулля–Шмидта"

В какой категории? Зафиксируем $_\xi G$ и рассмотрим категорию мотивов mod p (p — простое) и в ней — псевдоабелеву категорию, порожденную мотивами $_\xi G$-однородных многообразий (то есть замыкаем относительно взятия прямых слагаемых, сдвигов (и тензорных произведений, хотя это не важно))

<u>Теорема</u> (Черноусов–Меркурьев)

В этой категории выполнена теорема Крулля–Шмидта, то есть, если есть разложение в сумму неразложимых, то оно единственно

② X — проективное однородное многообразие, Y неприводимо

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ Y \end{tikzcd}$$

— локально по Зарискому тривиальное расслоение с клеточным слоем F

$\rightsquigarrow M(F) = \bigoplus \mathbb{Z}\{i\}$

Тогда $M(X) \simeq M(Y) \otimes M(F) = \bigoplus M(Y)\{i\}$

$CH(X) \simeq CH(Y) \otimes CH(F)$ как $CH(Y)$-модуль

$$\begin{tikzcd} U\times F \subset X \arrow[d] \\ U \subset Y \end{tikzcd}$$

$a \in CH^*(F) \rightsquigarrow$ берем $1\times a \longrightarrow \overline{1\times a}$ уже замкнуто в X

Такие замыкания как раз и образуют $CH(Y)$-базис в $CH(X)$, если в качестве a брать элементы базиса $CH(F)$

Теперь X — $_\xi G$-однородное, $X = {}_\xi(G/P)$

[redacted] $\xi_{F(X)}$ тривиальный

$_\xi(G/B)$ — многообразие Борелевских подгрупп в $_\xi G$

$$\begin{tikzcd} {}_\xi(G/B) \arrow[d, "P/B"] \\ X \end{tikzcd}$$

Над $F(X)$ расслоение выглядит как

$$\begin{tikzcd} G/B \arrow[d] \\ G/P \end{tikzcd}$$

- оно локально тривиально по Зарискому

$\rightsquigarrow$ это верно над открытым $U \subset X$

можно подействовать G и покрыть все X такими открытыми

$\rightsquigarrow$ все отображение локально тривиально по Зарискому

Его слой — P/B $\rightsquigarrow$ по Теореме

$M({}_\xi(G/B)) = M(X) \otimes M(P/B)$

$\rightsquigarrow$ если $M({}_\xi(G/B)) \otimes \mathbb{Z}/p$ раскладывается в сумму сдвигов $R_p(\xi)$, то и $M(X)$ тоже (по теореме Крулля–Шмидта)

Значит, достаточно доказывать для случая $X = {}_{\xi}(G/B)$

Мы доказываем, что $M(X)\otimes\mathbb{Z}/p$ раскладывается в сумму неразложимых кусков $R_p(\xi)$ со сдвигами.

$$\begin{tikzcd}
CH^*(BB)/p \arrow[r] \arrow[d, equal] & CH^*({}_{\xi}(G/B))/p \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & CH^*(\xi)/p \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \\
CH^*(BB)/p \arrow[r] & CH^*(G/B)/p \arrow[r] & CH^*(G)/p
\end{tikzcd}$$

${}_{\xi}(G/B) = X$

$\xi\in H^1(F,G)$ — рассматриваем как алгебраическое многообразие

(над замыканием)

$CH^*(G)/p = \mathbb{Z}/p[x_1,\dots,x_r]/(x_i^{p^{k_i}})$

① образ всего этого состоит из рациональных циклов

Через e_i обозначим любой прообраз x_i

② Из определения $J_p(\xi)$ мы знаем, что

$e_i^{p^{j_i}}$ + добавка — тоже рациональный цикл

У $CH^*(G/B)/p$ как $CH^*(BB)/p$-модуля есть ~~базис~~ система образующих из e^I, где $I=(i_1,\dots,i_r)$, $e^I = e_1^{i_1}\dots e_r^{i_r}$

$0\le I\le p^k-1$, т.е. $0\le i_m\le p^{k_m}-1$

(базис над образом $CH^*(BB)/p$)

③ Ищем рациональные циклы на $X\times X$ при помощи метода общей точки

$$\begin{tikzcd}
\alpha_i \arrow[d] \arrow[rr] & & \\
CH^*(X\times X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & CH^*(X_{F(X)}) \arrow[d, "\wr"] & {} \arrow[d] \\
\bar{\alpha}_i\in CH^*(G/B\times G/B) \arrow[r] & CH^*((G/B)_{F(X)})\ni e_i & {}
\end{tikzcd}$$

$\bar{\alpha}_i = e_i\times 1$ + добавка

Более аккуратные рассуждения показывают, что

$\bar{\alpha}_i = e_i\times 1 + (\text{добавка}) - 1\times e_i$

④ Пусть $a\in\mathrm{Im}(CH^*(BB)/p)$ — рациональный.

Можно найти „двойственный к нему“

$a^\vee\in\mathrm{Im}(CH^*(BB)/p)$ такой, что

$\deg(e^{p^k-1}\cdot a\cdot a^\vee) = 1$

(т.е. невырожденная форма на $\mathrm{Im}(CH^*(BB)/p)$ со значениями в $\mathbb{Z}/p$)

$$q = \underbrace{d^{p^y-1}}_{\text{рациональна}} \cdot \left(e^{p^y M} a \times e^{p^y(p^{k-y}-1-M)} a^\vee\right)$$

степень e^{p^y},
пот. рациональна
по определению y-инварианта

$\rightsquigarrow q$ рационален

- q — проектор (если проигнорировать добавки)
- q зависит от произвольного M и a. ($a \in$ базис образа, $0 \le M \le p^{k-y}-1$)

Если заставить их бегать, получится набор попарно ортогональных проекторов, которые в сумме дают диагональ

Упражнение: (Степень любого элемента в конечном моноиде — идемпотент)

$\to$ на самом деле нужно брать не это, а большую степень этого, чтобы убить добавки

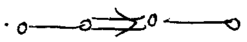
Посчитаем $q \cdot q$. Можно считать, что $d = e \times 1 - 1 \times e$

$$d^{p^y-1} = \sum_I e^I \times e^{p^y-1-I}$$

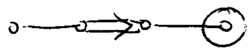
$$\rightsquigarrow q = \sum_I e^{p^y M + I} a \times e^{p^k - p^y - p^y M + p^y - 1 - I} a^\vee$$

$$\deg(e^{p^k-1} a a^\vee)(\ldots)$$

Пример многообразия, не расщепимого над общей точкой

 H_3 (комп. эрм. форма, $\mathbb{C}$) компактные октавы

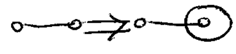
 $H_3(\mathbb{O})$ октонионы

 H_3 (гип. эрм. форма, $\mathbb{C}$)

Существует поле (например, $\mathbb{R}$) и группа типа F_4 над ним т.ч. параболическая подгруппа типа P_4 определена над $\mathbb{R}$, а остальные — нет.

$\xi \in H^1(F, F_4)$

$X = {}_\xi(F_4/P_4)$

$\xi_{F(X)}$ может дать группу с индексом 

По модулю 2 есть два инварианта:

$f_3 : H^1(F, F_4) \longrightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/2)$

$f_5 : H^1(F, F_4) \longrightarrow H^5(F, \mathbb{Z}/2)$

если у поля нет расширений нечетной степени, то это чистые формы

$\rightsquigarrow$ есть 3-кратная и 5-кратная формы Пфистера, ассоциированные с ξ

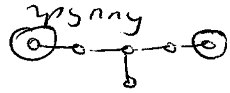
Марк Макдональд

J — 27-мерная йорданова алгебра

Предполагаем, что она приведенная (reduced):

I. $\xi \in H^1(F, F_4) \longrightarrow H^1(F, E_6)$

$\longrightarrow$ этот коцикл производит изотропную группу



II. $g_3 : H^1(F, F_4) \longrightarrow H^3(F, \mu_3^{\otimes 2})$

$g_3(\xi) = 0$

— этого всегда можно добиться кубическим расширением, а если нет расширений нечетной степени, то это заведомо так

III. в J есть идемпотент e

$Q_x(y) = xyx$ — квадратичная операция

e — <u>идемпотент ранга 1</u>, если

$$Q_e(J) \leqslant Fe \iff N(e) = 0,\ e^{\#} = 0,\ N(e,e,x) = 0\ \forall x \in J$$

$$\{\langle e \rangle \mid e \text{ — идемпотент ранга } 1\} = {}_{\xi}(E_6/P_6)$$

Условие $\iff$ у него есть рац. точка

Внутри ${}_{\xi}(E_6/P_6)$ есть $\mathbb{G}_m$, которая дает фильтрацию

$$J = \underset{\substack{1\\ a}}{Fe} \oplus \underset{\substack{16\\ b}}{U} \oplus \underset{\substack{10\\ c}}{V} \quad \text{— по весовым пространствам } \mathbb{G}_m$$

$\longrightarrow$ появляется фильтрация

${}_{\xi}(E_6/P_6)$ — замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}(J)$

$[a : b : c]$

$\curvearrowright \mathrm{Spin}_{10}$ — инвариантная фильтрация

$$\begin{tikzcd}
{}_{\xi}(E_6/P_6) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, dash, "\mathbb{A}^{16}"'] & \{a=0\} \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, dash, "\mathbb{A}^{5}"'] & \{a=0, b=0\} = \mathrm{Spin}_{10}/P_1 \\
\{b, c=0\} = pt & \{a=0, c=0\} = \mathrm{Spin}_{10}/P_5 &
\end{tikzcd}$$

или с другого конца:

$$\begin{tikzcd}
{}_{\xi}(E_6/P_6) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "\mathbb{A}^{8}"'] & \{c=0\} \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "\mathbb{A}^{1}"'] & \{c=0, b=0\} = pt \\
\{b=0, a=0\} = \mathrm{Spin}_{10}/P_1 & \{c=0, a=0\} = \mathrm{Spin}_{10}/P_5 &
\end{tikzcd}$$

$\hookrightarrow$ 8-мерная квадрика, и она пфистерова

— это дает f_3

У $\xi(E_6/P_6)$ есть рац. точка ⇝ есть большая клетка
⇝ оно бирац. эквивалентно проективному пространству

$$\begin{array}{ccc} \xi(E_6/P_6) & \dashleftarrow\dashrightarrow & \mathbb{P}(Fe\oplus\mathcal{U}) \\ [\alpha:b:c] & \longmapsto & [\alpha:b] \\ [\alpha^2:\alpha b:Q_8(e)] & \longleftarrow\!\shortmid & [\alpha:b] \\ b e'' b & & \end{array}$$

Они взаимно обратны, поскольку $Q_8(e)=\alpha c$, и достаточно доказать это на большой клетке; это следует из уравнений

у этой стрелки локус = 8-мерная квадрика

у этой стрелки локус = $\{\alpha=0,\ Q_8(e)=0\}=Spin_{10}/P_5$
= скрученная форма максимального ортогонального грассманиана

$\xi(F_4/P_4)$ живет внутри $\xi(E_6/P_6)$ как гиперплоское сечение
$\alpha+t(c)=0$, где t — линейная форма на V ($\dim V=10$)

Давайте пересечем все с этим уравнением

$$\xi(F_4/P_4) \dashleftarrow\dashrightarrow Q$$

15-мерная квадрика $\alpha^2+t(Q_8(e))=0$

локус — 7-мерная квадрика $Spin_9/P_1$

локус — $Spin_{10}/P_5=Spin_9/P_4$ — такой же

Q — норменная квадрика

$\langle\langle a,b,c,d,e\rangle\rangle$

$\langle a\rangle\perp\langle\langle b,c,d,e\rangle\rangle$ — инвариант этой формы

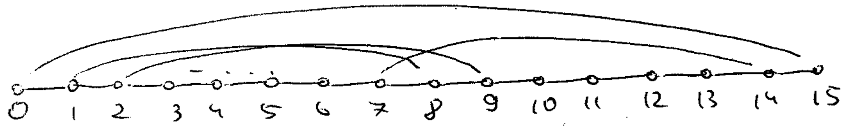
17-мерная квадратичная форма,
ассоц. квадрика — Q

I. $Bl_{Spin_9/P_1}\,\xi(F_4/P_4)\simeq Bl_{Spin_9/P_4}(Q)$

II. Для мотива раздутия есть формула:

$$M(Bl_XY)=M(Y)\oplus\big(M(X)\otimes M(\mathbb{P}(N_XY))\{\dots\}\big)$$

Мотив норменной квадрики раскладывается в один экземпляр $R(\langle\langle a,b,c,d,e\rangle\rangle)$ (как раз 15-мерной) и $R(\langle\langle b,c,d,e\rangle\rangle)$ в нужном количестве (7 штук)



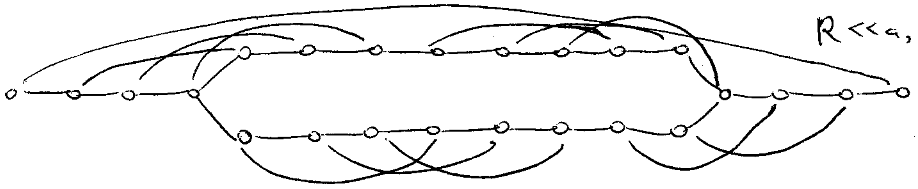
$Spin_9/P_1$ — норменная квадрика

→ ее мотив раскладывается в $R(\langle\langle b,c,d,e\rangle\rangle)$ (1 штука)

и мотивы Роста, соответствующие f_3

$Spin_9/P_4$ — расщепимо над общей точкой

$R\langle\langle a,b,c,d,e\rangle\rangle$



$_{\xi}(F_4/P_4)$

Пусть у $_{\xi}(F_4/P_4)$ есть точка над F',

$$\begin{array}{c} F' \\ \downarrow \\ F \end{array} \text{ — нечетной степени}$$

Верно ли, что у него есть рац. точка?

проективные гладкие

$$Y_1 \dashleftarrow\dashrightarrow Y_2$$

$$\Downarrow$$

$$Y_1(F) \neq \varnothing \Leftrightarrow Y_2(F) \neq \varnothing$$

Теперь $_{\xi}(F_4/P_4)(F') \neq \varnothing$

$$\Downarrow$$

$$Q(F') \neq \varnothing$$

$$\Downarrow \text{ т. Спрингера}$$

$$Q(F) \neq \varnothing$$

$$\Downarrow$$

$$_{\xi}(F_4/P_4)(F) \neq \varnothing$$

$$\begin{array}{ccc} Bl_{Spin_9/P_1}(_{\xi}(F_4/P_4)) & \simeq & Bl_{Spin_9/P_4} Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ _{\xi}(F_4/P_4) & & Q \end{array}$$