$\xi \in H^1(F, G)$, G — расщепимая
p — простое число $\rightsquigarrow J_p(\xi) = (j_1, \dots, j_r)$

Была теорема: X — ${}_{\xi}G$-однородное многообразие, клеточное над $F(X)$.

$\longrightarrow M(X) \otimes \mathbb{Z}/p = \bigoplus R_p(G)\{\dots\}$

и $P(R_p(G), t) = \prod \dfrac{1 - t^{p^{j_i} d_i}}{1 - t^{d_i}}$

$\boxed{\text{Утверждение}}$ При помощи всех $J_p(\xi)$ (для всех p) можно описать все такие X.

$$CH^*(BB) \longrightarrow CH^*(G/B) \twoheadrightarrow CH^*(G)$$

$X = {}_{\xi}(G/P)$

Попробуем нарисовать такую же последовательность для P:

$$CH^*(BP) \longrightarrow \underbrace{CH^*(G/P) \longrightarrow CH^*(G) \twoheadrightarrow CH^*(P)}_{\text{Это точная последовательность градуированных колец}},$$

точность в этом члене неизвестна! (может, ее и нет)

При этом $CH^*(P) \simeq CH^*(L) \simeq CH^*([L, L])$, где $L \le P$ подгруппа Леви

поскольку $P/U \simeq L$, а U аффинно

почему?

$$\begin{tikzcd}
CH^*(BB_L) \arrow[r] \arrow[d] & CH^*(L/B) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & CH^*(L) \arrow[d] \\
CH^*(BB_{[L,L]}) \arrow[r] & CH^*(L/B) \arrow[r] & CH^*([L,L])
\end{tikzcd}$$

B — борелевская в L

Не изоморфизм, но образы $CH^*(BB_L)$ и $CH^*(BB_{[L,L]})$ в $CH^*(L/B)$ одинаковы. Это достаточно проверить на CH^1.

Так, вот, в последовательности

$$CH^*(G/P)/_p \longrightarrow CH^*(G)/_p \longrightarrow \underbrace{CH^*(\overset{H}{\overset{\parallel}{[L,L]}})/_p}_{\text{описана в таблице Кача}}$$

$$CH^*(G)/_p = \mathbb{Z}/_p[x_1, \dots, x_r]/_{(x_i)^{p^{k_i}}}$$
$$\big\downarrow$$
$$CH^*(H)/_p = \mathbb{Z}/_p[y_1, \dots, y_s]/_{(y_j)^{p^{e_j}}}$$

<u>Утверждение</u> Есть отображение $\sigma: \{1,\dots,s\} \to \{1,\dots,r\}$ такое, что $\varphi(X_{\sigma(m)}) = c\cdot y_m$ + члены меньшего порядка, где

$$c\in(\mathbb{Z}/p)^\times \text{ — константа}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (G — простая) $\xi\in H^1(F,G)$, $X = {}_\xi(G/P)$, $Y = {}_\xi(G/B)$

Тогда следующие условия эквивалентны:

① X — клеточное над общей точкой

② $CH^*({}_\xi(G/B)) \xrightarrow{res} CH^*(G/B) \to CH^*(G) \to CH^*(P)$

(над алг. замыканием)

Вся эта композиция сюръективна

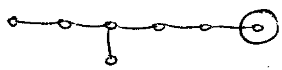
③ Для любого простого p

i) $j_{\sigma(m)}(\xi)=0$, если m такое, что $\deg(y_m)>1$

ii) $CH^1({}_\xi(G/B))/p \to CH^1(G/B)/p \to CH^1(G)/p \to CH^1(P)/p$

— сюръективна

$\boxed{\text{Пример}}$ $\xi\in H^1(F,E_7)$, $X = {}_\xi(E_7/P_7)$



Когда X расщепимо над общей точкой?

• $p=2$ $\quad CH^*(E_7)/2 = \mathbb{Z}/2[x_1,x_2,x_3,x_4]/(\dots)$

$\qquad\qquad$ deg: $\;1\;\;3\;\;5\;\;9$

$\quad CH^*(E_6)/2 = \mathbb{Z}/2[y_1]/(y_1^2)$

$\qquad\qquad$ deg: $\;3$

Условие ③ превращается в $j_2=0$

x_3, x_4 получаются операцией Стинрода $\rightsquigarrow j_3=j_4=0$ автоматически

• $p=3$ $\quad CH^*(E_7)/3 = \mathbb{Z}/3[x_1]/(x_1)^3$

$\qquad\qquad$ deg: $\;4$

$\quad CH^*(E_6)/3 = \mathbb{Z}/3[y_1]/(y_1^3)$

$\qquad\qquad$ deg: $\;4$

Условие: $j_1=0 \rightsquigarrow$ весь j-инвариант mod 3 равен 0

$\boxed{\text{Вопрос}}$ Посчитать j_2 для компактной формы E_7 над $\mathbb{R}$

Эквивалентно: Верно ли, что над $\mathbb{R}(SB(\mathbb{H}))$

$\qquad\qquad \shortparallel\; \mathrm{Frac}(\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2=1))$

(*) компактная форма E_7 расщепляется?

Эквивалентно: $R_2(\xi)$ — мотив Роста, отвечающий кватернионам

Сравним ${}_\xi(E_7/P_7)$ и $SB(\mathbb{H})$. Над $F({}_\xi(E_7/P_7))$ алгебра Титса ($=\mathbb{H}$) тривиальна $\rightsquigarrow SB(\mathbb{H})$ приобретает рац. точку. Если выполнено (*), то и наоборот: над $F(SB(\mathbb{H}))$ ${}_\xi(E_7/P_7)$ имеет рац. точку. Почему это так?

$\boxed{\text{Теорема}}$ X, Y — проективные однородные (возможно, относительно разных групп), p — простое.
Пусть $X_{F(Y)}$ и $Y_{F(X)}$ имеют рациональные точки.
Тогда $M(X) \otimes \mathbb{Z}/p$ и $M(Y) \otimes \mathbb{Z}/p$ имеют общее слагаемое, „задевающее" точку.
(То есть, [redacted] $q \in CH^{\dim X}(X \times X)$ — проектор, и [redacted] $\operatorname{Im} q$. над замыканием содержит $pt \in CH^{\dim(X)}(X)$)
это значит „задевает точку"

$\boxed{\text{Утверждение}}$ Если ${}_\xi G$ изотропна, и анизотропное ядро типа H, то ξ приходит из $\zeta \in H^1(F, H)$. Тогда $J_p(\xi)$ выражается через $J_p(\zeta)$:

$$j_i(\xi) = \begin{cases} j_m(\zeta), & \text{если } i = \sigma(m) \text{ для некоторого } m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Поэтому имеет смысл считать $J_p(\xi)$ только для анизотропных групп (то есть, над $\mathbb{R}$ — только для компактных форм)

- G_2, F_4: $\mathbb{Z}/2[\underset{\deg:\ 3}{x_1}]/(x_1^2)$ $\quad J_2(\xi) = (1)$ // не 0, ибо у $\mathbb{R}$ нет нечетных расширений
  $R_2(\xi) =$ мотив Роста $\langle\langle -1, -1, -1 \rangle\rangle$
- У E_6 компактная форма есть, но она внешняя
- E_7: $\mathbb{Z}/2[x_1, x_2, x_3, x_4]$, $\deg$: 1, 3, 5, 9

<u>Утверждение</u>. $J_2(\xi) = (1, 0, 0, 0)$, $R_2(\xi) =$ мотив Роста $\langle\langle -1, -1 \rangle\rangle$
Для доказательства потребуется

<u>Инвариант Роста</u>

Пусть G — простая, односвязная, но не обязательно расщепимая.
Тогда есть инвариант

$$r: H^1(F, G) \longrightarrow H^3(F, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(2))$$
$$\varinjlim_N H^3(F, \mu_N^{\otimes 2})$$

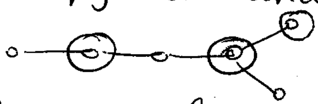
достаточно ограничиться одним большим N

который порождает всю абелеву группу таких инвариантов
$r(\xi)$ всегда лежит в кручении.
Посмотрим на наименьшее N_G такое, что $N_G \cdot r(\xi) = 0$ всегда ($\forall E/F, \forall \xi$)
Тогда N_G зависит только от типа G:
$N_{G_2} = 2$, $N_{F_4} = N_{E_6} = 6$, $N_{E_7} = 12$, $N_{E_8} = 60$ — для исключительных

Для G_2 мы это видели: $G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$, $\mathbb{O} \longleftrightarrow \langle\langle a, b, c\rangle\rangle \in H^3(F, \mathbb{Z}/2)$

Для F_4, E_6: $f_3 = 3r \in H^3(F, \mathbb{Z}/2)$, $g_3 = 2r \in H^3(F, \mathbb{Z}/3)$
где $r \in H^3(F, \mathbb{Z}/6)$.

$\boxed{\text{Упражнение}}$ (исследовательская задача)

Придумать формулу для
$$r\colon H^1(F, G) \longrightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/4),$$
где G — односвязная группа типа D_6 с индексом Титса 

(такая G задается кватернионами)

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Черноусов — Гарибальди)

Если G — расщепимая типа G_2, F_4, E_6 или E_7, то ядро инварианта Роста тривиально

Пусть $\xi \in H^1(F, G)$. Хотим узнать, тривиален ли ξ

Оказывается, достаточно посчитать $r(\xi)$

Для E_8 это неверно: взять $\xi \in H^1(\mathbb{R}, E_8)$, задающий компактную форму.

Воспользуемся этой теоремой для доказательства утверждения: $\mathcal{J}_2(\xi) = (1, 0, 0, 0)$, где ξ соотв. компактной форме E_7

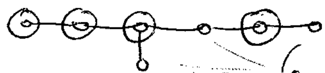
Достаточно доказать, что $\xi_{F(SB(\mathbb{H}))} = *$.

Действительно, если это так, то ${}_{\xi}(E_7/B)$ и $SB(\mathbb{H})$ имеют рациональные точки над полями функций друг друга.

Тогда у них есть общее мотивное слагаемое
$$R_2(\xi) = R_2(\langle\langle -1, -1\rangle\rangle) \rightsquigarrow \mathcal{J}_2(\xi) = (1, 0, 0, 0)$$
из формулы для полинома Пуанкаре.

Мы должны представить ξ как элемент $H^1(F, G')$, где G' односвязна.

Расщепимая G' не подойдет: ξ приходит из $H^1(F, E_7^{ad})$, но не из $H^1(F, E_7^{sc})$, поскольку алгебра Титса нетривиальна

Возьмем G' = группа с индексом Титса 

кватернионы

Тогда $\xi \in H^1(F, G')$.

Что можно сказать про $r(\xi)$? ξ расщепима над $\mathbb{C}$ $\to 2r(\xi) = 0$

$\rightsquigarrow r(\xi) \in H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \rightsquigarrow$ это либо 0, либо $\langle\langle -1, -1, -1\rangle\rangle$.

Переходим на $F(SB(\mathbb{H}))$

Тогда $r(\xi)$ в любом случае становится 0, а $G'_{F(SB(H))}$ расщепима.
Поэтому можно применить теорему Гарибальди – Черноусова
$\rightsquigarrow \xi_{F(SB(H))} = *$, чего мы и добивались.

Компактная форма E_8

$$CH^*(E_8)/2 = \mathbb{Z}/2[x_1, x_2, x_3, x_4]/(\dots)$$

deg: 3 5 9 15

Инвариант Роста $=0$

$j_1 = 0 \rightsquigarrow j_2 = j_3 = 0$

$\rightsquigarrow J_2(\xi) = (0, 0, 0, 1)$

$P(R_2(\xi), t) = 1 + t^{15}$

и $R_2(\xi) = R_2(\langle\langle -1, -1, -1, -1, -1 \rangle\rangle)$

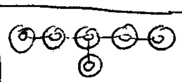
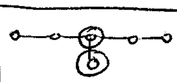
Мораль: над $\mathbb{R}$ мотивы однородных проективных многообразий (расщепимых над общей точкой) раскладываются в мотивы Роста от Пфистеровых форм с каким-то количеством -1; количество зависит от типа группы.

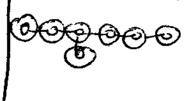
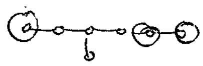
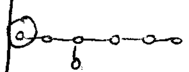
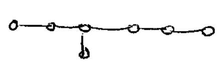
$\xi \in H^1(F, G)$, G — расщепимая типа E_6

Свяжем J-инвариант с индексом Титса:

$J_3(\xi)$ определяется индексом Титса над ко-3-замыканием поля F: $Gal(\bar{F}/F)$; берем 3-силовскую подгруппу $\rightsquigarrow$ получаем E/F — ко-3-замыкание F

Неформально — игнорируем расширения степеней, не делящихся на 3

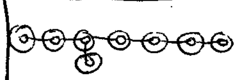
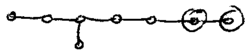
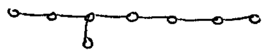
$J_3(\overset{E_6^{ad}}{G})$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$
индекс Титса					
Индекс алгебры Титса	1	3	1	3	(9 или 27)

$J_2(E_7^{sc})$	$(0,0,0)$	$(1,0,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
индекс Титса над ко-2-замыканием				
$r(\xi)$	0	чистый символ $\neq 0$ из $H^3(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$: $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$	сумма двух символов из $H^3(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ с общим слотом: $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle + \langle\langle a, d, e \rangle\rangle$	иначе

E_6 mod 2, E_7 mod 3 — легкие упражнения

E_8, E_7^{ad} mod 2 — исследовательское упражнение

E_8 mod 5 — легкое упражнение

$J_3(E_8)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$
индекс Титса			
$r(\xi)$	0	чистый символ $\neq 0$ из $H^3(F,\mathbb{Z}/3)$	иначе