X — ${}_\xi G$-однородное проективное. Все мотивы будут по модулю простого p

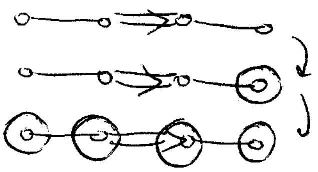
Раньше мы предполагали, что $\xi_{F(X)} = 1$

Иначе говоря, в индексе Титса G над $F(X)$ обведены все вершины

Тогда мы видели, что $M(X)\otimes \mathbb{Z}/p$ раскладывается в $R_p(\xi)\{\dots\}$

Более сложный пример: $X = {}_\xi(F_4/P_4)$

Если перейти на $F(X)$, у $G_{F(X)}$ обводится только одна вершина



В этой ситуации в разложении $M(X)\otimes\mathbb{Z}/2$ присутствовало два типа слагаемых, а именно, $R_2(\xi)\{\dots\}$ („маленький мотив Роста") и „верхнее слагаемое" (один раз)

X — многообразие; предполагаем, что верна теорема Крулля–Шмидта.

$\mathcal{U}(X) :=$ неприводимое слагаемое, „задевающее" единицу

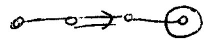
То есть, (X, q), $q \in CH^{\dim X}(X\times X)/p$ ← проектор, $q: CH^*(X)\longrightarrow CH^*(X)$, $1 \in \operatorname{Im} q$

Это называется <u>верхним мотивом</u> X (upper motive)

$\boxed{\text{Теорема}}$ $X = {}_\xi(G/P)$, p — простое.

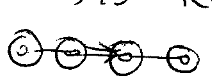
Тогда любое неприводимое слагаемое в мотивном разложении X является сдвигом ($\{\dots\}$) $\mathcal{U}(Y)$, где Y — ${}_\xi G$-однородное проективное, причем у индекса Титса $G_{F(Y)}$ обведено не меньше (по включению) вершин, чем у $G_{F(X)}$

В примере с F_4.



$\mathcal{U}(X)$ — верхний мотив, встречается один раз

а второй — это $R_2(\xi) = \mathcal{U}({}_\xi(G/B))$.



Что остается неизвестным? Неизвестны $P(\mathcal{U}(Y), t)$. Неизвестно, сколько раз они встречаются (и встречаются ли вообще) и с какими сдвигами. На эти вопросы частично помогает ответить

<u>Метод „раковин"</u> (shells, by Vishik)

Y задается каким-то подмножеством вершин Ψ на диаграмме Дынкина. $\mathcal{U}(Y)$ где-то „начинается" в картинке для X. Сформулируем ограничения на эту „начальную" позицию. Множество всех таких позиций будет называться „раковиной" для Y: SH_Ψ

Сначала определим $SH_{\leq \Psi}$. После этого $SH_{\Psi} = SH_{\leq\Psi} \setminus \bigcup\limits_{\Theta \subsetneq \Psi} SH_{\leq \Theta}$

$SH_{\leq\Psi} := \{ b \in CH^i(X_{\bar F})/p \mid$ ① b ~~определен~~ рационален над $F(Y_\Psi)$

② $\exists a \in CH_i(X_{\bar F})$ — тоже рациональный над $F(Y_\Psi)$ — такой, что

$$\deg(ab) = 1 \bmod p$$

дополнительная размерность

соответствующее однородное многообразие:

т.е. $b \in \mathrm{Im}\left(CH^i(X_{F(Y_\Psi)}) \longrightarrow CH^i(X_{\overline{F(Y_\Psi)}})\right)$

Это означает, что у $M(X_{F(Y_\Psi)}) \otimes \mathbb{Z}/p$ есть в качестве слагаемого мотив Лефшеца.
(в частности, $a \times b$ и $b \times a$ — рациональные проекторы над $F(Y_\Psi)$).
(это проектор: $(a\times b)\circ(a\times b) = \deg(ab)\, a\times b$)

Иначе говоря, мы следим за образами всех Лефшецов над $F(Y_\Psi)$

SH_Ψ задают разбиение всего множества однородных циклов $CH^i(X_{\bar F})/p$ (по теореме Карпенко)

$$A_1 \supset A_2 \begin{array}{c} \supset A_3 \supset \\ \supset A_4 \supset \end{array} A_5$$

Почему A_3 и A_4 не пересекаются?

$\boxed{\text{Теорема}}$ Если неразложимое мотивное слагаемое $M(X)\otimes\mathbb{Z}/p$ „начинается" с $b \in SH_\Psi$, то оно изоморфно сдвигу $U(Y_\Psi)$

Надо как-то научиться считать множества SH_Ψ. При этом все еще остается открытым вопрос, как выглядит $P(U(Y_\Psi), t)$.

<u>Замечание</u>: можно ограничиться только теми Ψ, которые встречаются в таблице Титса

<u>Замечание</u>: $U(X)$ задевает 1, но не обязан задевать точку, и может входить несколько раз.

Пусть X такое, что $X_{\bar F}$ клеточное. Если $U(X)$ задевает pt, то X называется <u>несжимаемым</u> (incompressible) по модулю p

Если $q = \sum a_i \times b_i$, то $q^t = \sum b_i \times a_i$ — транспонированный

$\boxed{\text{Теорема}}$ В той же ситуации пусть M — неразложимое слагаемое $M(X)\otimes\mathbb{Z}/p$, которое начинается с $b \in CH^i(X_{\bar F})/p$. Пусть есть <u>рациональный</u> $\alpha \in CH^k(X_{\bar F})/p$ такой, что $\alpha \cdot b$ лежит в той же раковине, что и b. Тогда в $M(X)\otimes\mathbb{Z}/p$ есть слагаемое $M\{k\}$, которое начинается с $\alpha\cdot b$.

Эта теорема обычно используется, чтобы оценить размер $M=\mathcal{U}(Y_\psi)$ в смысле полинома Пуанкаре.

$\boxed{\text{Пример}}$ $\xi\in H^1(F,E_6^{ad})$, $X={}_\xi(E_6/P)$

$$M(X)\otimes \mathbb{Z}/p = ?$$

① $p\neq 2,3$ — раскладывается в Лефшецы
(Поскольку $\exists\, L/F$: $[L:F]=2^?\cdot 3^?$: $\xi_L=1$.
Применением cores получаем кучу Лефшецов)

② $p=2 \rightsquigarrow$ можно „считать", что $\xi\in H^1(F,E_6^{sc})$:
препятствие для поднятия ξ в $H^1(F,E_6^{sc})$ — алгебра Титса $[A_{\omega_1}]$

$$1\longrightarrow\mu_3\longrightarrow E_6^{sc}\longrightarrow E_6^{ad}\longrightarrow 1$$

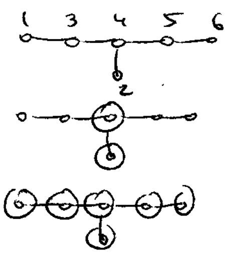
$$H^1(F,E_6^{sc})\longrightarrow H^1(F,E_6^{ad})\longrightarrow H^2(F,\mu_3) = {}_3Br(F)$$

Препятствие = класс центральной простой алгебры — алгебры Титса
Можно найти расширение степени $3^?$, которое убивает $[A_{\omega_1}]$
Для коциклов из $H^1(F,E_6^{sc})$ есть 3-компонента инварианта Роста:

$$g_3: H^1(F,E_6^{sc})\longrightarrow H^3(F,\mu_3^{\otimes 2})$$

Известно, что если $g_3=0$, то ${}_\xi E_6$ изотропна (хотя бы )
Но можно убить g_3 расширением степени $3^?$.
Поэтому можно с самого начала считать, что ${}_\xi E_6$ изотропна
Так что $M(X)\otimes\mathbb{Z}/p$ раскладывается в сумму сдвигов мотивов D_4-однородных многообразий. D_4 соответствует форме Пфистера: $Spin(q)$, $q=\langle\langle a,b,c\rangle\rangle$ и все мотивы D_4-однородных многообразий раскладываются в сумму $R_2(\langle\langle a,b,c\rangle\rangle)$

③ $p=3$. Индексы Титса по модулю 3:



Не расщепимые над общей точкой многообразия такие:
${}_\xi(E_6/P_2)$, ${}_\xi(E_6/P_4)$, ${}_\xi(E_6/P_{2,4})$.
Для остальных все раскладывается в $R_3(\xi)$, а $P(R_3(\xi),t)$ выписывается в зависимости от индекса Титса ${}_\xi E_6$ и $\mathrm{ind}\,A_{\omega_1}$.

Посмотрим на проекцию

$$\begin{array}{ll} {}_\xi(E_6/P_{2,4}) & \text{слой — скрученная форма } \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & \text{Но по модулю 3 скрученных форм } \mathbb{P}^1 \text{ нет} \\ {}_\xi(E_6/P_4) & \rightsquigarrow \text{слой } = \mathbb{P}^1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow M({}_\xi(E_6/P_{2,4}))\otimes \mathbb{Z}/3 = \big(M({}_\xi(E_6/P_4))\otimes\mathbb{Z}/3\big)\oplus$$
$$\oplus\big(M({}_\xi(E_6/P_4))\otimes\mathbb{Z}/3\big)\{1\}.$$

Посмотрим на ${}_\xi(E_6/P_2) = X$

По теореме Карпенко в ответе встречаются только $\mathcal{U}(X)$ со сдвигами и $R_3(\xi)$ со сдвигами. Для ${}_\xi(E_6/P_4)$ аналогично.

Несложно показать, что $\mathcal{U}({}_\xi(E_6/P_2)) = \mathcal{U}({}_\xi(E_6/P_4))$, так как они приобретают рац. точку над полями функций друг друга:

$J_3(\xi)$	
$(2,1)$	$M({}_\xi(E_6/P_2)) = \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}\{1\}$ $M({}_\xi(E_6/P_4)) = \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}\{9\}\oplus R_3(\xi)\{\ldots\}$
$(1,1)$	$\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}\{1\}\oplus\bigoplus_{i=4}^{7} R_3(\xi)\{i\}$ $M({}_\xi(E_6/P_2))=$ $M({}_\xi(E_6/P_4)) = \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}\{9\}\oplus R_3(\xi)\{\ldots\}$
$(0,1)$ $[A_{\omega_1}]=0$	Все многообразия — клеточные над общей точкой, поэтому мотивы раскладываются в суммы $R_3(\xi)\{\ldots\}$

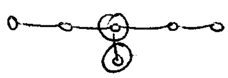
сдвиги считаются из полинома Пуанкаре

$\mathcal{U}$ здесь другое!

Хотим разложить $M({}_\xi(E_6/P_2))$. Там могут встретиться $\mathcal{U}$ и $R_3(\xi)$. Откуда может начинаться слагаемое $\mathcal{U}\{\ldots\}$? Для этого надо посчитать соответствующую раковину

$\mathcal{U}\{i\} \rightsquigarrow i = 0, 1, 10, 11, 20, 21$

соответствующая раковина состоит из 6 элементов и их кратных

$X \rightsquigarrow X_{F(X)}$ 

$M(X_{F(X)})\otimes\mathbb{Z}/3 =$ сумма $M(SB)$ и Лефшеца

Лефшец может встречаться в позициях $0, 1, 10, 11, 20, 21$ — методом разрезания диаграммы Хассе

Если $\mathcal{U}$ начинается с $b\,(=1)$, и $\alpha \in CH^i(X_{\bar F})/_3$ - рационален, и $\alpha\cdot b$ лежит в той же раковине, то есть сдвиг $\mathcal{U}$, который начинается с αb.

$CH^1(\xi(E_6/P_2)_{\bar F})$ рациональна, потому что фундаментальный вес ω_2 лежит в решетке корней.

В качестве α возьмем h — образующую CH^1.

Теорема говорит, что заведомо встречается сдвиг $\mathcal{U}\{1\}$

Предполагаем, что $pt \in CH_0(X)/_3$ не рациональна

Тогда любой проектор $q=\sum a_i \times b_i$ содержит число слагаемых, делящееся на 3: $q^t\cdot q \rightsquigarrow (pr_1)_*(q^t\cdot q) = (\#\,\text{слагаемых}\ q)\cdot pt$, $\quad X\times X \xrightarrow{pr_1} X$

Раз есть сдвиг, $\mathcal{U}$ содержит 0, 10, 20

Поэтому других сдвигов $\mathcal{U}$ нет.

Покажем, что в случае $J_3(\xi)=(1,1)$ действительно появляются слагаемые $R_3(\xi)\{\ldots\}$.

$CH^*(X\times X)$ ← по теореме Черноусова–Меркурьева на [redacted] $X\times X$ [redacted] есть фильтрация

$$
\begin{aligned}
CH^*(X\times X) &= CH^*(X)\oplus CH^{*-1}(\xi(E_6/P_{2,4}))\oplus CH^{*-6}(\xi(E_6/P_{1,2,6}))\oplus\\
&\oplus CH^{*-11}(\xi(E_6/P_{2,4}))\oplus CH^{*-21}(X)
\end{aligned}
$$

Положим теперь $*=21$:

Пусть h_1 — образующая $CH^1(E_6/P_1)$

$$
\begin{aligned}
CH^{21}(X\times X) &= CH^{21}(X)\oplus CH^{20}(\xi(E_6/P_{2,4}))\oplus CH^{15}(\xi(E_6/P_{1,2,6}))\oplus\\
&\oplus CH^{10}(\xi(E_6/P_{2,4}))\oplus CH^{0}(X)
\end{aligned}
$$

найдем хороший элемент здесь

Воспользуемся J-инвариантом:

$J_3(\xi)=(1,1) \rightsquigarrow h_1^3$ рациональна

$$
\begin{array}{ccccc}
E_6/P_{1,2,6} & & CH^*(E_6/P_{1,2,6}) & & h_1\\
\downarrow & & \uparrow & & \uparrow\\
E_6/P_1 & & CH^*(E_6/P_1) & & h_1
\end{array}
$$

Возьмем $h_1^6\, c_9(T(\xi(E_6/P_{1,2,6})))$

касательное расслоение: его классы Черна заведомо рациональны

Куда он переходит в $CH^{21}(X \times X)$?
Обозначим его через α.
Его реализация — $\alpha_* : CH^*(X) \longrightarrow CH^*(X)$

$$h_2^4 \longmapsto -h_2^4$$

$(h_2 \in CH^1(X_{\bar{F}})$ — образующая$)$ явное вычисление
Берем $\alpha^{\circ N}$ — проектор mod 3
Он обязан переводить h_2^4 в h_2^4, поэтому он ненулевой
$\alpha_*(CH^i(X)) = 0$ при $i < 4$, поэтому это не диагональ.
$\alpha^{\circ N}$ начинается с h_2^4, и h_2^4 не в раковине для $\mathcal{U}$
$\rightsquigarrow$ там торчит $R_3(\xi)$.
Явный подсчет полиномов Пуанкаре дает полный ответ.
Докажем, что в случае $J_3(\xi) = (2,1)$ слагаемых $R_3(\xi)$ нет
Считаем раковину для $R_3(\xi)$ — это все, кроме того, что было перечислено. С какой позиции может начинаться $R_3(\xi)$?
Если с h, то есть и слагаемое, начинающееся с h^2
Если с $b \in CH^2$, тоже можно умножить на h, $bh \neq 0$
Если с $b \in CH^3$ — то же самое, $bh \neq 0$
Отсюда следует, что если $R_3(\xi)$ вообще встречается, то встречается и такой, который начинается с коразмерности ≥ 4
$\dim R_3(\xi) = 16$. Если он начинается с ≥ 4, то заканчивается в ≥ 20, а там уже все занято: CH^{20} одномерно; транспонированный и $\mathcal{U}\{1\}$ заполняет всю CH^{20}