Связь мотивов и символов

ν_n-многообразие (и, p — простое): ① гладкое проективное многообразие X, $\dim X = p^n - 1 =: d$

② У X есть T_X, рассмотрим виртуальное $-T_X \in K_0(X)$ ← $\boxed{\text{Опр.}}$

Рассмотрим полиномы от его классов Черна такие, что соответствующее выражение лежит в $CH_0(X)$

Степени таких выражений = <u>характеристические числа</u> X.

Требование: все характеристические числа делятся на p и $S_d(X)$ не делится на p^2

$x_1, \ldots, x_d$ — корни Черна $-T_X \rightsquigarrow S_d = x_1^d + \ldots + x_d^d$

$\boxed{\text{Пример}}$ $p=2 \to$ норменная квадрика — ν_{n-1}-многообразие

$a_1, \ldots, a_n \in F^*/(F^*)^2$ (если $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \neq 0$)

$\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle \perp \langle -a_n\rangle = q$ $\quad \dim: 2^{n-1} + 1 - 2$

Соотв. квадрика — норменное многообразие

$\boxed{\text{Упр.}}$ Норменная квадрика изотропна $\iff \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle = 0$

$u \in H^n(F, \mu_p^{\otimes n})$. X — <u>норменное многообразие</u>, если X — ν_{n-1}-многообразие и $u_{F(X)} = 0$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Рост)

По каждому чистому символу можно построить норменное многообразие, на котором есть <u>специальное соответствие</u> (special correspondence)

// на самом деле, мы всегда далее будем работать с многообразиями, на которых задано специальное соответствие.

Далее $d = \dim X$, $b = \frac{d}{p-1}$

$\boxed{\text{Опр.}}$

$$X \xleftarrow{\pi_0, \pi_1} X \times X \xleftarrow{\pi_0, \pi_1, \pi_2} X \times X \times X$$

$$CH^*(X \times X) \xrightarrow{\pi_0^*, \pi_1^*, \pi_2^*} CH^*(X \times X \times X)$$

$\rho \in CH^b(X \times X)$ — <u>специальное соответствие</u>, если

① $(\pi_0^* - \pi_1^* + \pi_2^*)(\rho) = 0$

② $(\pi_0)_*(\rho^{p-1}) \neq 0 \mod p$

это другое π_0: то, которое $X \times X \to X$ $\qquad \rho^{p-1} \in CH^d(X \times X)$

то есть ρ^{p-1} — ненулевой проектор

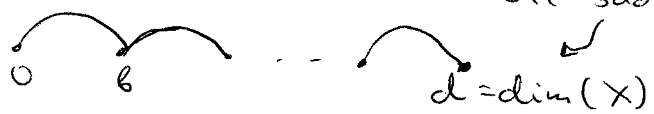
$\boxed{\text{Замечание}}$ Что-то похожее было, когда раскладывали мотив квадрики Пфистера

Из доказательства следует, что g^{p-1} дает проектор по модулю p; пусть M — соответствующее мотивное слагаемое. (оно неразложимое)

$$\text{Тогда } M_{F(X)} = \underbrace{\mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p\{b\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p\{(p-1)b\}}_{\text{шаг } b,\text{ всего } p \text{ штук}}$$

— обобщенный мотив Роста

он задевает точку



В частности, норменное многообразие несжимаемо по модулю p.

Нам понадобится частичное обращение этой теоремы

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Семенов, Вишик?)

X — ν_{n-1}-многообразие со специальным соответствием

Тогда $\exists u \in H^n(F, \mu_p^{\otimes(n-1)})$ такой, что $u_{F(X)} = 0$

Более того, $\forall L/F$ $u_L = 0 \Leftrightarrow X_L$ имеет 0-цикл степени, не делящейся на p.

(Не доказано, что u — чистый символ)

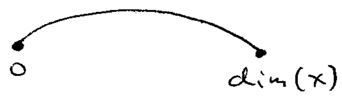
$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (Семенов, Вишик?)

$\underline{p=2}$

X — любое гладкое проективное ~~нужной размерности~~;

M — слагаемое в $M(X) \otimes \mathbb{Z}/2$ такое, что

$$M_{F(X)} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2\{\dim X\}$$



Тогда (1) $\dim X = 2^{n-1} - 1$;

(2) $\exists u \in H^n(F, \mathbb{Z}/2)$ $\forall L/F$ $u_L = 0 \Leftrightarrow X_L$ имеет 0-цикл степени, не делящейся на p

$\boxed{\text{Пример}}$ $\xi \in H^1(F, E_8)$: $r(\xi) = 0$

(достаточно того, что 2-компонента $=0$)

$$J_2(\xi) = (\underset{3}{j_1}, \underset{5}{j_2}, \underset{9}{j_3}, \underset{15}{j_4})$$

Из условия $r(\xi) = 0$ следует, что $j_1 = j_2 = j_3 = 0$.

Считаем, что $j_4 = 1$.

Тогда $M({}_\xi(G/B)) = \bigoplus R_2(\xi)\{\dots\}$

$R_p(\xi)_{F(X)} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2\{15\}$

Применяя теорему (с модификацией), получаем элемент

$u \in H^5(F, \mathbb{Z}/2)$ // $15 = \dfrac{2^{5-1}-1}{2-1}$

⇝ На ядре инварианта Роста есть когомологический инвариант со значениями в H^5

„Геометрической" конструкции пока нет.

Есть вариант этой конструкции (Черноусов):

1. Такие ξ расщепляются квадратичным расширением
2. Есть явное задание всех коциклов с этим свойством в терминах некоторых элементов $F^*/(F^*)^2$

(см. обобщение классификации групп над $\mathbb{R}$, черные корни...)

На самом деле, Черноусов построил инварианты в H^5 и H^9

($9 = 8+1$, 8 простых корней E_8, $5 = 4+1$ 4 выделенных эл-та)

3. Взять их $\cup$-произведение

Над $\mathbb{R}$ компактная форма E_8 лежит в ядре инварианта Роста

$\langle\langle -1,-1,-1,-1,-1\rangle\rangle$ – нетривиален

Можно рассмотреть аналог компактной формы над $\mathbb{Q}$, у нее все еще будет такой инвариант

Семенов

$\forall L/\mathbb{Q} \quad \xi_L = 1 \iff \langle\langle -1,-1,-1,-1,-1\rangle\rangle_L = 0$

$\iff$ -1 представляется в виде суммы 16 квадратов

Серр

в такой E_8 есть конечная подгруппа, изоморфная $SL_2(31)$

(p, n) $\quad \{a_1,\dots,a_n\} \leftrightarrow M_n(\{a_1,\dots,a_{n-1}\}, a_n)$; $(M_n)_F = \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p\{b\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p\{b(p-1)\}$ (максимальный)

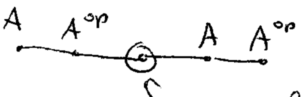
	Норменное	Пфистерово	Сосед пфистерова (гиперплоское сечение)
	$M_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{p^{n-1}-p^{n-2}-1} M_{n-1}\{i\}$	$\bigoplus_{i=0}^{p^{n-1}-1} M_n\{i\}$	$\bigoplus_{i=0}^{p^{n-1}-2} M_n\{i\}$
dim:	$p^{n-1}-1$	$2(p^{n-1}-1)$	$2(p^{n-1}-1)-1$
$p=2$, n – любое	$\langle\langle a_1,\dots,a_{n-1}\rangle\rangle \perp \langle -a_n\rangle$	$\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$	такое q: $q \perp \langle 1\rangle = \langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$
p – любое, $n=2$	$SB(A)$ A – циклическая степени p	$SB(A)\times SB(A^{op})$	$\xi(A_{p-1}/P_{1,p-1})$ – incidence variety
$p=3$, $n=3$	Многообразие Меркурьева – Суслина 8 = скрученная форма гиперплоского сечения $Gr(3,6)$ $A \leftrightarrow \{a_1,a_2\}$ $\deg A = 3$	$\xi(E_6/P_6)$ $SL_3\times SL_3$ 16	$\xi(F_4/P_4)$

$\boxed{p=3,\ n=4}$	Гиперплоское сечение в $\xi(E_7/P_7)$	$\dim = 52 = \dim F_4$	?
$\boxed{p=2,\ n=4}$	7	$14 = \dim G_2$	13
$\boxed{p=5,\ n=4}$	124	$248 = \dim E_8$	

Во втором столбце есть открытое подмножество, являющееся торсором над первым

Посмотрим на многообразие Меркурьева — Суслина

$\{a, b, c\}$; $\{a, b\} \longleftrightarrow A$



$SL_2(A)$

$\leftarrow$ этой вершине соответствует $Y = \xi(A_5/P_3)$ — изотропное многообразие

На нем есть фильтрация, индуцированная

$$Y_F \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3(F^6))$$

$\uparrow$ на самом деле, это представление определено над базой.

$20 = 1 + 9 + 9 + 1$

— разложение этого представления относительно $\mathbb{G}_m$

$Y = \{[\alpha : u : v : \beta] \mid$ какие-то уравнения$\}$

Добавим еще одно уравнение: $\beta = c\alpha$

$\rightsquigarrow$ получилось многообразие размерности 8 — это X

Теорема Лефшеца

(поле замкнуто)

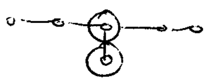
$X \hookrightarrow Y$ — гиперплоское сечение, оба гладкие, X, Y клеточные

Тогда $CH_i(X) \xrightarrow{\sim} CH_i(Y)$, $i < \frac{\dim Y}{2}$

$CH^i(Y) \xrightarrow{\sim} CH^i(X)$, $i < \frac{\dim Y}{2}$

(У нас X клеточное) — по т. Бялыницкого-Бируля

$\xi(E_6/P_6)$ ① Начинаем с изотропного E_6



— соответствует случаю $c = 1$

Можно либо все потом скрутить, либо воспользоваться конструкцией: по A и c можно построить $J = A \oplus A \oplus A$ (J — 27-мерная), в таблице умножения возникает c.

$\{a, b\} \rightsquigarrow a$ — фиксирование, $L/F = F(\sqrt[p]{a})$

$\rightsquigarrow \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{p}$, в таблице умножения возникает b

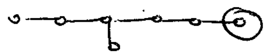
Это наводит на мысль о том, что существует общая конструкция (?!)
(p фиксировано, $n \longmapsto n+1$)

$\xi(E_6/P_6)$ — подмногообразие в $\mathbb{P}(A \oplus A \oplus A)$, заданное уравнениями, зависящими от C

Теперь посмотрим на случай $\boxed{p=3,\ n=4}$

$\{a, b, c, d\}$

$\{a, b, c\} \longrightarrow J$ — 27-мерная йорданова алгебра

$\to E_6 \to E_7$: 

Берем E_7/P_7; на ней есть фильтрация $\rightsquigarrow \underset{\alpha}{1} + \underset{u}{27} + \underset{v}{27} + \underset{\beta}{1}$

накладываем уравнение $\alpha = d \cdot \beta$ — это гиперплоское сечение

Пфистерово живет в $\mathbb{P}(J \oplus J \oplus J)$, у него $\dim = 52$

(гиперплоское сечение E_7/P_7 можно описать как компактификацию $\overline{E_6/F_4}$, а для случая $p=3, n=3$ — $\overline{SL_3 \times SL_3/SL_3}$)

$\boxed{p=2;\ n=4}$ Норменное соответствует компактификации $Spin_7/G_2$, а пфистерово — компактификации G_2

$$H^1(F, (SL_3 \times SL_3)/\mu_3) \longrightarrow H^3$$
$$H^1(F, E_6) \longrightarrow H^4$$
$$H^1(F, Spin_7) \longrightarrow H^4$$

$\boxed{p=2,\ n=3}$ $\dim = 3,\ 6$