1 Категория элементов и копределы представимых функторов (29 февраля)

В этом докладе мы докажем теорему, сформулированную на спецкурсе «Аффинные групповые схемы», о конструкции геометрической реализации предпучка. Пусть k — коммутативное кольцо, k-$\mathfrak{Alg}$ — категория k-алгебр, $\mathfrak{Set}$ — категория множеств. Если $\mathcal{C}$ — малая категория, мы обозначаем через $\widehat{\mathcal{C}} = \mathfrak{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ категорию предпучков множеств на $\mathcal{C}$, то есть, функторов из $\mathcal{C}^{op}$ в $\mathfrak{Set}$ с естественными преобразованиями в качестве морфизмов. В прошлом семестре нас интересовал случай, когда $\mathcal{C} = (k\text{-}\mathfrak{Alg})^{op} = \mathfrak{AffSch}$ – категория аффинных схем над k. Мы определили схему как предпучок на $\mathcal{C}$, являющийся пучком в топологии Зариского и обладающий аффинным покрытием. При этом соответствие Йонеды вкладывает $\mathcal{C}$ в $\widehat{\mathcal{C}}$, поэтому аффинная схема является схемой — k-алгебре C соответствует представимый функтор $\mathrm{Hom}_k(C, -)$. С другой стороны, можно рассмотреть категорию $\mathfrak{Esg}_k$ локально окольцованных пространств над k (пространств с пучком k-алгебр; для простоты можно предполагать, что $k = \mathbb{Z}$ и тогда это просто пучок колец) и для каждой k-алгебры S можно построить локально окольцованное пространство $\mathrm{Spec}_k(S)$, называемое аффинной «схемой». Подкатегория в $\mathfrak{Esg}_k$, состоящая из аффинных схем, антиэквивалентна категории k-$\mathfrak{Alg}$ и, следовательно, эквивалентна $\mathcal{C}$.

По каждому локально окольцованному пространству X можно построить функтор из k-$\mathfrak{Alg}$ в $\mathfrak{Set}$, сопоставляющий k-алгебре C множество $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Esg}}(\mathrm{Spec}(C), X)$. Нас интересует левый сопряженный к этому функтору, то есть возможность построить по предпучку его *геометрическую реализацию*. Оказывается, такое сопряжение действительно существует, и при ограничении на подкатегорию схем в $\mathcal{C}$ и подкатегорию «схем» в $\mathfrak{Esg}$ мы получаем эквивалентность категорий. Это выражает ту мысль, что язык схем и язык «схем» по сути эквивалентен. Неформально говоря, если у нас есть схема, можно рассмотреть ее покрытие аффинными схемами $\mathrm{Hom}(C_i, -)$ и построить для каждого i локально окольцованное пространство $\mathrm{Spec}(C_i)$. После этого хочется склеить все $\mathrm{Spec}(C_i)$ в одно локально окольцованное пространство. Вместо того, чтобы делать это и проверять все необходимые свойства, мы увидим, как теория категорий позволяет сделать это в более общей ситуации — не только для схем, но для произвольных предпучков на $\mathcal{C}$.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная малая категория, P — объект категории $\widehat{\mathcal{C}}$. Тогда P можно каноническим образом представить как копредел диаграммы, состоящей из представимых объектов. Иными словами, любой предпучок на $\mathcal{C}$ является копределом представимых предпучков.*

Иными словами, нам нужно показать, что по функтору $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathfrak{Set}$ можно каноническим образом построить малую категорию J и функтор $A\colon J \to \mathcal{C}$ такой, что P изоморфно копределу $\varinjlim(y \circ A)$ функтора $J \to \mathcal{C} \to \mathfrak{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, где $y\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, $C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ — вложение Йонеды.

Категория J, построенная по P — это **категория элементов** P, обозначаемая через $\int_{\mathcal{C}} P$ или просто $\int P$. Ее объекты — пары (C, p), где $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и $p \in P(C)$. Морфизмы $(C', p') \to (C, p)$ — это морфизмы $u\colon C' \to C$ в категории $\mathcal{C}$, которые «сохраняют выделенный элемент», то есть, отображение $P(u)\colon P(C) \to P(C')$ переводит p в p'. Композиция морфизмов определяется как композиция соответствующих им стрелок u в $\mathcal{C}$. Имеется очевидный забывающий функтор, называемый проекцией $\pi_P\colon \int_{\mathcal{C}} P \to \mathcal{C}$, $(C, p) \mapsto C$.

Теорема 1. *Пусть $A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ — функтор из малой категории $\mathcal{C}$ в кополную категорию $\mathcal{E}$ (то есть, в $\mathcal{E}$ существуют все малые копределы). Тогда имеется пара сопряженных функторов L, R: функтор $R\colon \mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{C}}$ сопоставляет объекту $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ предпучок*

$R(E)\colon C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A(C), E)$*; функтор* $L\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}$ *сопоставляет предпучку* $P \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$ *копредел* $L(P) = \varinjlim(\int P \xrightarrow{\pi_P} \mathcal{C} \xrightarrow{A} \mathcal{E})$.

Доказательство. Естественное преобразование $\tau\colon P \to R(E)$ — это семейство отображений $\tau_C\colon P(C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A(C), E)$, где C пробегает все объекты категории $\mathcal{C}$. Стало быть, для каждого C и для каждого элемента $p \in P(C)$ задан морфизм из $A(C)$ в E; то есть, имеется семейство морфизмов $\tau_C(p)\colon A(C) \to E$ в категории $\mathcal{E}$, проиндексированное парами $(C, p \in P(C))$, то есть, объектами категории $\int P$. Из естественности семейства τ_C немедленно следует естественность семейства $\tau_C(p)$. Нетрудно понять, что это семейство морфизмов задает коконус из $A \circ \pi_P$ в E. По определению копредела такие семейства биективно соответствуют морфизам $L(P) \to E$. Мы начали с морфизма $\tau\colon P \to R(E)$ и построили морфизм $L(P) \to E$. Можно проверить естественность этого соответствия по P и по E, стало быть, L является левым сопряженным к R. □

Следствие 1 (Геометрическая реализация)**.** *Функтор* $\mathfrak{S}\colon \mathfrak{Esg} \to \mathfrak{Set}^{k\text{-}\mathfrak{Alg}}$*, сопоставляющий пространству* X *функтор* $\mathfrak{S}X\colon C \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Esg}}(\mathrm{Spec}(C), X)$*, обладает левым сопряженным* $|\cdot|\colon \mathfrak{Set}^{k\text{-}\mathfrak{Alg}} \to \mathfrak{Esg}$.

Доказательство. Положим в теореме $\mathcal{E} = \mathfrak{Esg}$, $C = k\text{-}\mathfrak{Alg}^{op}$, и определим $A\colon \|\text{-}\mathfrak{Alg} \to \mathfrak{Esg}$ равенством $A(C) = \mathrm{Spec}(C)$ с очевидными морфизмами. Тогда $R = \mathfrak{S}$, а L — искомая геометрическая реализация. □

Следствие 2 (=Утверждение 1)**.**

Доказательство. Положим в теореме $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}$, а в качестве $A\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ возьмем вложение Йонеды y. Тогда функтор R сопоставляет объекту $E \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathcal{C}}$ функтор $C \mapsto \mathrm{Hom}(y(C), E)$, что по лемме Йонеды совпадает с $E(C)$. Это значит, что R — тождественный функтор. Поскольку левый сопряженный определен однозначно с точностью до естественной эквивалентности, L должен быть эквивалентен тождественному функтору, стало быть, P изоморфен копределу $y \circ \pi_P$, что и требовалось. □

На категорию $\int_{\mathcal{C}} P$ вместе с проекцией $\pi_P\colon \int_{\mathcal{C}} P \to \mathcal{C}$ можно смотреть как на расслоение над категорией $\mathcal{C}$: над каждым объектом $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ висит слой в виде множества $P(C)$. Кроме того, для любой стрелки $u\colon C' \to C$ любой элемент слоя $p \in P(C)$ однозначно «поднимается» до элемента $p' = P(u)p \in P(C')$. Неформально говоря, это означает, что $\int P$ — накрывающая категория $\mathcal{C}$: для любого элемента p из слоя точки C любой «путь» u в точку C однозначно поднимается до «пути» в $\int P$.

Можно обобщить эту конструкцию и рассматривать в качестве «проекции» любой функтор $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$, удовлетворяющий условию, аналогичному описанному выше «поднятию путей». Более того, в качестве исходного функтора P можно брать функтор не в категорию множеств $\mathfrak{Set}$, а, например, в категорию всех [малых] категорий $\mathfrak{Cat}$. Получится так называемая **конструкция Гротендика**: расслоение, в котором над каждым объектом категории $\mathcal{C}$ висит не множество, а целая категория. В частности, интересен случай, когда функтор P пропускается через категорию всех [малых] группоидов.