Напоминание:

CFG $\qquad \mathcal{S}$ — базовая категория

$\mathcal{X} \xrightarrow{P} \mathcal{S}$

①
$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, dashed, "\varphi"] & s \end{tikzcd} \qquad \mathcal{X}$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd} \qquad \mathcal{S}$$

②
$$\begin{tikzcd} & s & \\ u \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, dashed, "\exists ! \gamma"'] & & t \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \cdot & \\ \cdot \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "g"'] & & \cdot \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

Для каждого $S \in \mathcal{S}$, стало быть, определена категория $\mathcal{X}_S$:
ее объекты — те X, для которых $P(X) = S$
морфизмы — $X \xrightarrow{f} Y$ т.ч. $P(f) = id_S$

$$\begin{tikzcd} \exists ! t \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & s \arrow[d] \\ T \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
— аналог существования pull-back

Пример:
$$\begin{tikzcd} M_g \arrow[d] \\ Sch \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \times_S T \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ T \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

также есть расслоенные произведения

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ — CFG над $\mathcal{S}$ $\to$ умеем строить $\underline{A} \times_{\underline{B}} \underline{C}$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$Ob = (a, c, \alpha)$, $a \in Ob\underline{A}$, $c \in Ob\underline{C}$, $\alpha : f(a) \xrightarrow{\sim} g(c)$

морфизмы: $a \to a'$, $c \to c'$
$$\begin{tikzcd} f(a) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & g(c) \arrow[d] \\ f(a') \arrow[r, "\sim"] & g(c') \end{tikzcd}$$

Был пример с BG:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\text{— G-торсор}"] \\ S \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \underline{\operatorname{Spec} k} \arrow[d] \\ \underline{S} \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$

Продолжаем определение стэка:

$\mathcal{S}$ — базовая категория, и на ней задана топология Гротендика

$\mathcal{S} = (Sch, \acute{e}t)$ — например

$\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{S}$ — CFG

Построим предпучок над $\mathcal{S}$: фиксируем $S \in Ob\, \mathcal{S}$

$Isom_{\mathcal{X}}(x, y)(T)$ — берем все $T \in \underline{S}$: $\quad T \longrightarrow S$

$x, y \in Ob\, \mathcal{X}_S$

$f^*x \quad x$

$f^*y \quad y$

$T \xrightarrow{f} S$

f^*x либо изоморфно f^*y, либо между ними в слое нет морфизмов

Положим

$Isom_{\mathcal{X}}(x, y)(T) = \{$изоморфизмы $f^*(x) \xrightarrow{\sim} f^*(y)$ в $\mathcal{X}_T\}$

Для каждого S и для всех x, y над S

$$Isom_{\mathcal{X}}(x, y)(-) : \underline{S}^{op} \longrightarrow Sets \quad \text{— предпучок}$$

Требуем, чтобы он был пучком на $\underline{S}$: $\boxed{\text{Акс. 1}}$

т.е. для покрытия $T_\alpha \longrightarrow T$

$$Isom_{\mathcal{X}}(x, y)(T) \longrightarrow \prod_\alpha Isom_{\mathcal{X}}(x, y)(T_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} Isom_{\mathcal{X}}^{(x,y)}(T_{\alpha\beta})$$

изоморфизмы клеятся из кусочков — уравнитель

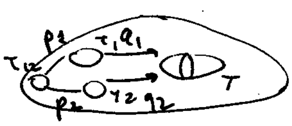
$\boxed{\text{Акс. 2}}$ $(T_\alpha \longrightarrow T)$ — покрытие

t_α — над T_α

$t_1 \quad \exists t \quad \mathcal{X}$

t_2

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathcal{S} \end{tikzcd}$$



такие, что есть изоморфизмы

$$\varphi_{\alpha\beta} : p_\alpha^* t_\alpha \xrightarrow{\sim} p_\beta^* t_\beta$$

+ условие коцикла

Тогда $\exists$ сечение t над T: — и единственная по Акс. 1

$\varphi_\alpha^*(t) \overset{\lambda_\alpha}{\simeq} t_\alpha$ — изоморфизмы, согласов. на пересечениях

$$\begin{tikzcd} \text{Bundles} \arrow[d] \\ \text{Top} \end{tikzcd}$$

— морфизмы: $\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & V' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$ — пулл-бэки

— пример стэка

CFG, удовлетворяющая этим двум аксиомам, является стэком

Аналогично, для $X \in Ob(\mathrm{Top})$

$\underline{X}$ — категория топ. пр-в над X

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \longrightarrow & \mathrm{Top} \\ \begin{pmatrix} Y \\ \downarrow \\ X \end{pmatrix} & \longmapsto & Y \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{X} \text{ — стэк}$$

DM-стэки — стэки Делиня–Мамфорда

$\boxed{\text{Опр.}}$ Представимые морфизмы

$\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ $\quad \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — стэки над S

f называется представимым, если $\forall T \in S$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \times \underline{T} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{T} \arrow[d] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "f"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \underline{T} \cong \underline{T'}$ для некоторого $T' \in S$

$\mathrm{Hom}(\underline{X}, \underline{Y}) = \mathrm{Hom}(X, Y)$

$\underline{X} \times_Z \underline{Y} = \underline{X \times_Z Y}$

$\rightsquigarrow$ всякий морфизм между представимыми стэками является представимым.

Можно взять любое свойство морфизмов, сохр. при расширении базы и локальное в топологии на S, и перенести его на стэки!

$\boxed{\text{Опр.}}$ Представимый $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ — плоский (этальный, конечный, ...)

если $\forall T \in S$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \underline{T} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \underline{T} \arrow[d] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "f"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

F — плоский (этальный, конечный...)

$\boxed{\text{Опр.}}$ DM-стэк: $\mathfrak{X}$

① $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ – представимый, квазикомпактный, отделимый

② $\exists\, \mathcal{U} \in Sch$ $\quad \underline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathfrak{X}$ – представимый этальный и сюръективный

$[X/_G]$ – DM-стэк, если действие достаточно хорошее