В прошлый раз:

- $\mathcal{M}_{g,n} := \{[(C, x_1, \dots, x_n)]\}$
- орбифолд (будет еще раз
- $\chi(\mathcal{X}) := \sum (-1)^{\dim C} \dfrac{1}{\# G_C}$
- $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Y}$ — накрытие
- $\chi(\mathcal{X}) = \frac{1}{k}\chi(\mathcal{Y})$
- $\mathbb{R}^n_+ / G, \quad G \leq S_n$
- ленточный граф

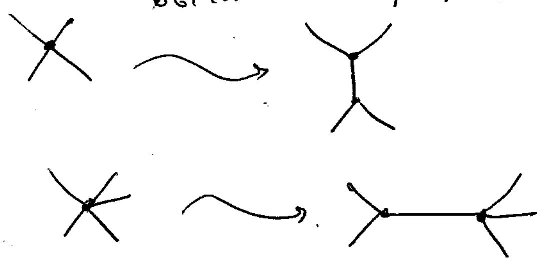
- метрический ленточный граф: $\xi \longrightarrow \mathbb{R}_f$

$\mathrm{Aut}(\Gamma) \curvearrowright \mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ — число ребер, поскольку $\mathrm{Aut}(\Gamma) \longrightarrow S_{e(\Gamma)}$

$RG_{g,n}$ — классы изоморфизма ленточных графов (комбинаторных) рода g с n граничными компонентами валентность

$$(*) \quad \begin{cases} \chi(\Gamma) = v(\Gamma) - e(\Gamma) = 2-2g-n \\ b(\Gamma) = n \end{cases}$$

вытягивание ребра!



$$\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)} \Big/ \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

$$\bigcup_{\Gamma \in RG_{g,n}} \frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\mathrm{Aut}(\Gamma)} =: RG^{met}_{g,n}$$

$$\max_{\Gamma \in RG_{g,n}} e(\Gamma) = 6g-6+3n$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g = 3g-3, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_g = 6g-6$$

его эйлерова характеристика: Harer–Zagier, 1986

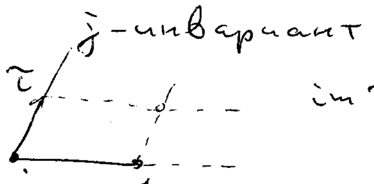
$$\chi = \sum_{\Gamma \in RG_{g,n}} \frac{(-1)^{e(\Gamma)}}{\# \mathrm{Aut}(\Gamma)} = \frac{(2g+n-3)!\,(2g)(2g-1)}{(2g)!\,n!}\,\zeta(1-2g)$$

$(g > 1)$ // см. Ландо–Звонкин

$\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}^n_+ \xrightarrow{\sim} R\,G^{met}_{g,n}$

- Мамфорд
- квадр. дифференциал
- дифференциал Штребеля

$\mathcal{M}_{1,1}$



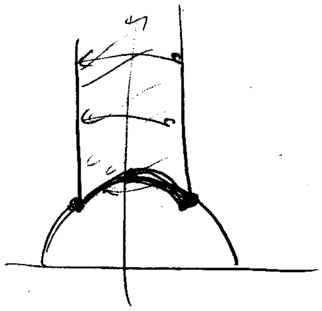
$SL_2(\mathbb{Z})$

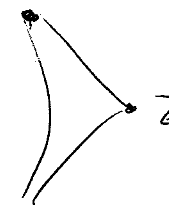
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ $\qquad G = SL_2(\mathbb{Z}) / \left(\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = PSL(2, \mathbb{Z})$

— модулярная группа

$y^2 = x^3 + ax + b$ с инволюцией $y \longleftrightarrow -y$





$\chi = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \longrightarrow$ прав. ответ $-1/12$ (с учётом $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

снова определение орбифолда

Moerdijk

def Группоид в категории Top.

G_0 — объекты $\qquad G_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} G_0 \qquad \underset{s(g)}{x} \xrightarrow{g} \underset{t(g)}{y}$

G_1 — стрелки

$G_1 \times_{G_0} G_1 \xrightarrow{m} G_1$, ассоциативна

$G_0 \xrightarrow{u} G_1$

$G_1 \xrightarrow{i} G_1$

Группоид Ли — это гладкие многообразия + гладкие морфизмы

$G_0 = G_1 = M$, Id_M — все стрелки $\rightsquigarrow$ „дискретный группоид"

$K \curvearrowright M$ $G_0 = M$, $G_1 = K \times M$

группа Ли   гладкое многообразие

$$K \times M \underset{t = act}{\overset{s = pr_2}{\rightrightarrows}} M$$

$$G_1 \times_{G_0} G_1 \longrightarrow G_0 \text{ — из умножения в } K$$

— <u>группоид действия</u>

$\mathcal{G}$ — группоид Ли, $x \in G_0$

$\rightsquigarrow G_x = \{g \mid s(g) = t(g) = x\}$ — группа Ли

$ts^{-1}(x)$ — орбита

$G_0/\sim$ — множество орбит

$x \sim y \Leftrightarrow x, y$ в одной орбите

$\| \ |\mathcal{G}|$ — <u>пространство орбит</u>

$\boxed{\text{Опр.}}$

$$G_1 \xrightarrow{(s,t)} G_0 \times G_0$$

(1) • если прообраз компакта — компакт (собственное), то $\mathcal{G}$ — <u>собственный</u> (proper) группоид. Тогда G_x компактны

(2) • если все G_x дискретны,

$\Uparrow$ то $\mathcal{G}$ — foliation groupoid (<u>группоид слоения</u>)

(3) • если s, t — локальные диффеоморфизмы,

то $\mathcal{G}$ — étale (<u>этальный</u> группоид)

— тогда $\dim G_0 = \dim G_1 =: \dim \mathcal{G}$

(1) + (2) $\rightsquigarrow$ G_x — конечные группы

Собственный этальный группоид = orbifold groupoid

$\mathcal{GL}$ — категория группоидов Ли

стрелки в $\mathcal{GL}$:
$$\underbrace{\boxed{\begin{matrix} G_0 \xrightarrow{\varphi_0} G_0' \\ G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_1' \end{matrix}}}_{\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'}$$

$Orb \simeq \mathcal{GL}_0[W^{-1}]$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{H} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$$

$H_0 \xrightarrow{\alpha} G_1$ гладкое

и $\forall x \in H_0$

$$\begin{tikzcd}
\varphi(x) \arrow[r, "\alpha(x)"] \arrow[d, "\varphi(h)"'] & \psi(x) \arrow[d, "\psi(h)"] \\
\varphi(y) \arrow[r, "\alpha(y)"] & \psi(y)
\end{tikzcd}$$

эквивалентность группоидов (W)

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

φ – „полный"

φ – „точный" → каждый объект из G_0 можно соединить стрелкой с объектом в $\varphi(\mathcal{H})$

пр-ва стрелок диффеоморфны

Морита-эквивалентность:

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H}' \xleftarrow{\varphi'} \mathcal{G}'$$

морфизм $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ в Orb – это данные

экв-сть: → $\mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{H} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$

$$\mathcal{G}\mathcal{L}_d[W^{-1}]$$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$
$$\rightsquigarrow$$

① $|\mathcal{H}| \xrightarrow{\varphi} |\mathcal{G}|$ – непрерывно

② $\mathcal{G}$ – собств. этальный $\rightsquigarrow$ $|\mathcal{G}|$ снабжается структурой орбифолда в старом смысле

③ $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ – эффективные $\rightsquigarrow$ Морита-экв-сть $\Leftrightarrow$ орбиф. структуры одинаковые