Саша Неклитов

В прошлый раз:

$$R \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} U$$

U — схема, R_* — схема,
R — „отношение экв-сти", но не обязательно $R \hookrightarrow U \times U$

$m: R \times_{s, U, t} R \longrightarrow R$
$e: U \longrightarrow R$
$i: R \longrightarrow R$

= „внутренний группоид" в Sch

Сегодня из группоида $R \rightrightarrows U$ построим стэк

План:

(1) построим $[R \rightrightarrows U]^{pre}$ — предстэк

(2) Возьмем stackification:
есть общая процедура, как из CFG сделать стэк, но нам она не нужна

$G \rightrightarrows \operatorname{Spec} k \rightsquigarrow$ по идее должна получаться BG

BG = категория всех G-торсоров

$[G \rightrightarrows \operatorname{Spec} k]^{pre}$ = категория тривиальных G-торсоров

1) Определим $[R \rightrightarrows U]^{pre}$ — предстэк над Sch/k

Объекты: объект над схемой S — $\begin{array}{c} S \\ \downarrow g \\ U \end{array}$

Морфизмы: над $f: S' \longrightarrow S$ в Sch/k живут

$$\begin{pmatrix} S' \\ g' \downarrow \\ U \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} S \\ g \downarrow \\ U \end{pmatrix}$$

$S' \longrightarrow S$

γ — это морфизм $\gamma: S' \longrightarrow R \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} U$ такой, что

$$s \circ \gamma = g'$$
$$t \circ \gamma = g \circ f$$

Пример:

$[G \rightrightarrows \operatorname{Spec} k]$

Объекты: $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} k \end{array}$ — единственный объект в слое над X

Построим ~~морфизм~~ функтор $[G \rightrightarrows \operatorname{Spec} k] \longrightarrow$ тривиальные G-торсоры

$$\left(\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} k \end{array}\right) \longmapsto \begin{array}{c} G \times X \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

Посмотрим на морфизмы:

$$\left(\begin{array}{c} X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\ \operatorname{Spec} k \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma} \left(\begin{array}{c} Y \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ \operatorname{Spec} k \end{array}\right)$$

над $X \xrightarrow{f} Y$

$\gamma : X \longrightarrow G$

условия

$s \circ \gamma = g$

$t \circ \gamma = g \circ f$) автоматически, поскольку $\operatorname{Spec} k$ — финальный объект

$$\rightsquigarrow \operatorname{Hom}_{[G \rightrightarrows \operatorname{Spec} k]^{pre}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{Sch/k}(X, G)$$

а в категории торсоров

$(g, x) \longmapsto (g \cdot \gamma(x), f(x))$ — задается морфизм $\gamma : X \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r] \arrow[d] & G \times Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ эти категории эквивалентны

<u>Еще пример</u>

$\mathcal{M}_{1,1}$ — категория

Объекты: $C \xrightarrow{\pi} S$ — гладкий, $s : S \longrightarrow C$ — сечение π

слои π — эллиптические кривые

Факт: любая эллипт. кривая $\hookrightarrow \mathbb{P}^2$

$$y^2 z = x^3 + A x z^2 + B z^3 \qquad 4A^3 + 27B^2 \neq 0$$

$$j = 1728 \cdot \frac{4A^3}{4A^3 + 27B^2}$$

Параметра 2, но на самом деле 1

есть 2 семейства:

$C_1 \longrightarrow S_1 \qquad C_1 : y^2 = x^3 + Ax + 1$ — покрывает все j-инварианты, кроме 1728

$S_1 = \{A \mid 4A^3 + 27 \neq 0\}$

$C_2 \longrightarrow S_2$: $\quad C_2 : y^2 = x^3 + x + B$ — покрывает все j-инварианты, кроме 0.

$S_2 = \{B \mid 4 + 27B^2 \neq 0\}$

Теперь $\mathcal{U} = S_1 \sqcup S_2$

$\alpha, \beta \in \{1,2\}$ $\quad R_{\alpha\beta} = \{(u, v, \varphi) \mid u \in S_\alpha,\ v \in S_\beta,\ \varphi : (C_\alpha)_u \xrightarrow{\sim} (C_\beta)_v\}$

$R = \coprod_{\alpha,\beta \in \{1,2\}} R_{\alpha\beta}$ $\qquad R \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathcal{U}$ — группоид

$\underline{S_1} \longrightarrow \mathcal{M}_{1,1}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S_1 \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} C_1(x) \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S_1 \end{tikzcd}$$

$\underline{S_1 \times_{\mathcal{M}_{11}} S_2} = R_{1,2}$: $\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\alpha"'] \\ S_1 \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\beta"] \\ S_2 \end{tikzcd}$, $\varphi : \left(\begin{tikzcd} C_1(x) \arrow[d] \\ x \end{tikzcd}\right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{tikzcd} C_2(y) \arrow[d] \\ y \end{tikzcd}\right)$

$$\begin{tikzcd} C_1(x) \arrow[r, "\mu", "\sim"'] \arrow[d] & C_2(y) \arrow[d] \\ X \arrow[r, rightsquigarrow, "\mu"] & Y \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$

α пропускается через R_{12}:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & S_1 \\ R_{12} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$x \longmapsto (\alpha(x), \beta(\mu(x)), \mu_{\alpha(x)})$

β — тоже

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} X \times_{R_{12}} Y \arrow[d] \\ R_{12} \end{tikzcd}$$ — схема над R_{12}

В итоге $R \rightrightarrows \mathcal{U}$

$\rightsquigarrow$

$(R \rightrightarrows \mathcal{U}) = \mathcal{M}_{1,1}$ ассоц. стэк

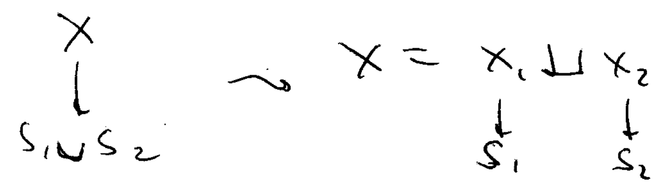
Посчитаем $[R \rightrightarrows \mathcal{U}]^{pre}$:

Объекты над X: $\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S_1 \sqcup S_2 \end{tikzcd}$

Морфизмы над $f : X \longrightarrow Y$

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S_1 \sqcup S_2 \end{tikzcd}\right) \xrightarrow{\gamma} \left(\begin{tikzcd} Y \arrow[d] \\ S_1 \sqcup S_2 \end{tikzcd}\right)$$

т.ч. $\gamma : X \longrightarrow \coprod_{\alpha,\beta \in \{1,2\}} R_{\alpha,\beta}$



$$(X_1 \sqcup X_2) \longmapsto \begin{matrix} C_1(X_1) \\ \downarrow \\ X_1 \end{matrix} \ \sqcup \ \begin{matrix} C_2(X_2) \\ \downarrow \\ X_2 \end{matrix}$$

<u>Пример</u>: $R = U$, $s, t = \mathrm{id}_U$

$\rightsquigarrow [R \rightrightarrows U]^{pre} = \underline{U}$ — изоморфизм (?!) — тривиальная схема

$R = U \times_k U$, $s = \pi_1$, $t = \pi_2$

$[R \rightrightarrows U]^{pre} = \underline{\operatorname{Spec} k}$ — эквивалентность

Сейчас делаем стэк из $[R \rightrightarrows U]^{pre}$

Опр.

$$\begin{matrix} R' & \longrightarrow & R \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ U' & \longrightarrow & U \end{matrix}$$

— морфизм группоидных схем называется <u>квадратным</u>, если 2 квадрата

$$\begin{matrix} R' & \longrightarrow & R \\ s'\downarrow & & \downarrow s \\ U' & \longrightarrow & U \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} R' & \longrightarrow & R \\ t'\downarrow & & \downarrow t \\ U' & \longrightarrow & U \end{matrix}$$

декартовы

Опр. <u>Банальная группоидная схема</u>

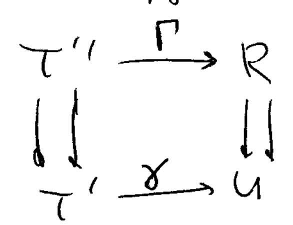
$T' \xrightarrow{g} T$ — морфизм схем

$\rightsquigarrow T'' = T' \times_T T' \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} T'$ — банальная группоидная схема

Опр. $(R \rightrightarrows U)$-<u>торсор</u> — это CFG над Sch

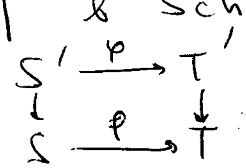
объекты над T:

1. $g : T' \longrightarrow T$
2. $T'' \rightrightarrows T'$ — банальный группоид, построенный по g
3. квадратный морфизм



морфизмы над $f : S \longrightarrow T$ в Sch

— это $\varphi : S' \longrightarrow T'$:



и

тогда если
$$\begin{tikzcd} S'' \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & T'' \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ S' \arrow[r, "\varphi"] & T' \end{tikzcd}$$
и

диаграмма

$$\begin{tikzcd} S'' \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & T'' \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\ & R \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\ S' \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr] & & T' \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

должна быть коммутативной

$\boxed{\text{Опр.}}$
$$\begin{tikzcd} T'' \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & R \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ T' \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$
— <u>тривиальный</u> торсор, если $\exists$ морфизм
$$\left(\begin{tikzcd} T'' \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & R \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ T' \arrow[r] & U \end{tikzcd}\right) \longrightarrow \left(\begin{tikzcd} R \times_U R \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & R \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ R \arrow[r, "s"] & U \end{tikzcd}\right)$$
канонический тривиальный

<u>канонический тривиальный торсор:</u>

$$\begin{tikzcd} R\, {}_s\!\times_s R \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & R \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ R \arrow[r, "s"] & U \end{tikzcd}$$
— построен по $R \xrightarrow{s} U$

Например, $(G \rightrightarrows \operatorname{Spec} k)$-торсор:
$$\begin{tikzcd} T'' \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ T' \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ $T'' \cong T' \times G$
$T' \times_T T' \cong T' \times_T G$
$T' \to T$ — это G-торсор

канонич. трив. приходит из $G \rightrightarrows \operatorname{Spec} k$

$T' \to T$ — <u>локально тривиальный торсор</u>, если $\exists$ „покрытие" $f: S \longrightarrow T$ (покрытие в эталной топологии) вместе с $S' \longrightarrow S$ (тривиальный торсор)

такое, что
$$\begin{tikzcd} S'' \arrow[r] \arrow[d] & T'' \arrow[d] \\ S' \arrow[r] \arrow[d] & T' \arrow[d] \\ S \arrow[r, "f"] & T \end{tikzcd}$$
$\left(\begin{smallmatrix} S'' \to T'' \\ S' \to T' \end{smallmatrix}\right)$ — морфизм в категории торсоров

$\boxed{\text{Опр.}}$ $(R \rightrightarrows U)$ — подкатегория (полная) локально тривиальных торсоров

Какой канонический морфизм $[R \rightrightarrows U]^{pre} \longrightarrow (R \rightrightarrows U)$?

Объект $[R \rightrightarrows U]^{pre}$ = стрелка

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "\alpha"'] & & S \times_U S \arrow[d] \\ U \arrow[rr, mapsto, shorten=2em] & & S \end{tikzcd}$$

— банальный группоид

$$\begin{tikzcd} S \times_U S \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & R \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ S \arrow[r, "\alpha"] & U \end{tikzcd}$$